

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

PAR **FIRAS KHEMANE**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : AUTOMATIQUE, PRODUCTIQUE, SIGNAL ET IMAGE

Estimation fréquentielle par modèle non entier et approche ensembliste – Application à la modélisation de la dynamique du conducteur

Soutenue 2011

Devant la commission d'examen formée de :

MM. L. JAULIN	Professeur des Universités, ENSTA Laboratoire DTN – Bretagne	<i>Rapporteur</i>
M. BASSET	Professeur des Universités, ENSISA Laboratoire MIPS – Mulhouse	<i>Rapporteur</i>
A. OUSTALOUP	Professeur des Universités, ENSEIRB, Laboratoire IMS – CNRS UMR 5218 – Bordeaux	
X. MOREAU	Professeur des Universités, Université Bordeaux 1, Laboratoire IMS – CNRS UMR 5218 – Bordeaux	
R. MALTI	Maître de Conférences, Université Bordeaux 1, Laboratoire IMS – CNRS UMR 5218 – Bordeaux	
X. XXX	PSA	

Remerciements

Table des matières

Introduction générale et organisation de la thèse	1
Notations	5
1 Analyse par intervalles	7
1.1 Introduction	8
1.2 Arithmétique des intervalles réels	8
1.2.1 Intervalles	8
1.2.2 Pessimisme	9
1.2.2.1 Phénomène de dépendance	10
1.2.2.2 Phénomène d’enveloppement	10
1.2.3 Fonction d’inclusion	11
1.2.3.1 Fonction d’inclusion des fonctions élémentaires	12
1.2.3.2 Fonction d’inclusion naturelle	13
1.2.3.3 Fonction d’inclusion centrée	13
1.2.3.4 Fonction d’inclusion de Taylor	14
1.2.3.5 Propriétés des fonctions d’inclusion	15
1.3 Arithmétique des intervalles complexes	16
1.3.1 Représentation rectangulaire	16
1.3.2 Représentation polaire	17
1.3.3 Représentation circulaire	19
1.4 Inversion ensembliste par arithmétique des intervalles	21
1.4.1 Problème de satisfaction de contraintes	21
1.4.2 Inversion ensembliste par contraction	22
1.4.2.1 Contracteurs	22
1.4.2.2 Contracteur de propagation/rétropropagation	25
1.4.3 Inversion ensembliste par bisection	26

1.4.4	SIVIA avec contracteur	28
1.5	Solvers et boîtes à outils	29
1.5.1	C-XSC	29
1.5.2	INTLAB	29
1.5.3	QUIMPER	29
1.6	Conclusion	30
2	Opérateurs et systèmes à dérivées réelles et par intervalles	31
2.1	Introduction	33
2.2	Intégration et dérivation réelles	34
2.2.1	Intégration réelle	34
2.2.2	Dérivation réelle	35
2.2.2.1	Définition de <i>Riemann-Liouville</i>	36
2.2.2.2	Définition de <i>Caputo</i>	36
2.2.2.3	Définition de <i>Grünwald</i>	37
2.2.2.4	Transformée de <i>Laplace</i> de la dérivée d'une fonction	37
2.3	Intégration et dérivation par intervalle	38
2.3.1	Définition de l'intégrale par intervalle réel	38
2.3.1.1	Transformée de <i>Laplace</i> de l'intégrale par intervalle d'une fonction	39
2.3.1.2	Étude de la monotonie du gain et de la phase par rapport à l'ordre $[\nu]$ de l'intégrateur par intervalle	41
2.3.2	Définition de la dérivée par intervalle réel	43
2.3.2.1	Transformée de <i>Laplace</i> de la dérivée par intervalle d'une fonction	45
2.3.2.2	Étude de la monotonie du gain et de la phase par rapport à $[\nu]$ du dérivateur par intervalle	45
2.3.3	Étude de la monotonie de la réponse temporelle d'un système par rapport à l'ordre de dérivation par intervalle	46
2.4	Représentation des systèmes non entiers	50
2.4.1	Équation différentielle	50
2.4.2	Pseudo-représentation d'état des systèmes non entiers	52
2.4.3	Fonction de transfert	52
2.4.3.1	Forme modale factorisée	53
2.4.3.2	Forme modale développée	54

2.5	Stabilité des systèmes non entiers	54
2.6	Fonctions de transfert élémentaires	56
2.6.1	Fonction de transfert élémentaire de première espèce	57
2.6.1.1	Stabilité et résonance	57
2.6.1.2	Analyse de la fonction de transfert en boucle ouverte équiva- lente	58
2.6.2	Fonction de transfert élémentaire de deuxième espèce	59
2.6.2.1	Stabilité d'une fonction de transfert élémentaire de deuxième espèce	60
2.6.2.2	Résonance d'une fonction de transfert élémentaire de deuxième espèce	63
2.6.2.3	Analyse de la fonction de transfert en boucle ouverte équiva- lente	69
2.6.3	Extension de fonction de transfert élémentaire de première espèce à des ordres de dérivation sous forme d'intervalle	75
2.6.4	Extension de fonction de transfert élémentaire de deuxième espèce à des ordres de dérivation sous forme d'intervalle	76
2.7	Conclusion	77
3	Estimation des paramètres d'un modèle non entier par approches ensemblistes à partir de données fréquentielles	79
3.1	Introduction	81
3.2	Estimation ensembliste des paramètres d'un modèle non entier dans le cas général	82
3.2.1	Estimation ensembliste par la représentation rectangulaire	83
3.2.2	Estimation ensembliste par la représentation polaire	84
3.2.3	Estimation ensembliste par la représentation circulaire	85
3.2.4	Mise en place des algorithmes pour l'estimation garantie	86
3.2.4.1	Rappel de l'algorithme SIVIA avec contracteur	88
3.2.4.2	Algorithme SIVIA sous INTLAB	88
3.2.4.3	Algorithme SIVIA sous C-XSC	89
3.2.4.4	Programme utilisant le solveur QUIMPER	90
3.3	Exemple d'estimation ensembliste des paramètres d'un modèle de première es- pèce	91
3.3.1	Estimation ensembliste par la représentation rectangulaire	94

3.3.1.1	CSP réel pour l'estimation de paramètres du modèle de première espèce	94
3.3.1.2	CSP complexe pour l'estimation de paramètres du modèle de première espèce	94
3.3.1.3	Comparaison entre le CSP réel et le CSP complexe sur la représentation rectangulaire	96
3.3.2	Estimation ensembliste par la représentation polaire	98
3.3.2.1	CSP réel pour l'estimation des paramètres du modèle de première espèce	98
3.3.2.2	CSP complexe pour l'estimation des paramètres du modèle de première espèce	99
3.3.2.3	Comparaison entre le CSP réel et le CSP complexe sur la représentation polaire	101
3.3.3	Estimation ensembliste par la représentation circulaire	102
3.3.4	Fusion de l'ensemble des solutions	103
3.4	Exemple d'estimation ensembliste des paramètres d'un modèle de deuxième espèce	104
3.4.1	Estimation ensembliste par la représentation rectangulaire	107
3.4.1.1	CSP réel pour l'estimation des paramètres du modèle de deuxième espèce	108
3.4.1.2	CSP complexe pour l'estimation des paramètres du modèle de deuxième espèce	109
3.4.1.3	Comparaison entre le CSP réel et le CSP complexe sur la représentation rectangulaire	110
3.4.2	Estimation ensembliste par la représentation polaire	112
3.4.2.1	CSP réel pour l'estimation des paramètres du modèle de deuxième espèce	112
3.4.2.2	CSP complexe pour l'estimation des paramètres du modèle de deuxième espèce	113
3.4.2.3	Comparaison entre le CSP réel et le CSP complexe sur la représentation polaire	114
3.4.3	Estimation ensembliste par la représentation circulaire	115
3.4.4	Fusion de l'ensemble des solutions	117
3.5	Application à l'estimation ensembliste des paramètres d'un système de diffusion thermique dans un barreau d'aluminium	118

3.5.1	Description du banc d'essai	119
3.5.2	Identification du barreau thermique	120
3.5.2.1	Identification non paramétrique de la réponse fréquentielle	121
3.5.2.2	Estimation paramétrique d'un modèle de type boîte noire	121
3.5.2.3	Prise en compte des incertitudes	123
3.5.2.4	Estimation ensembliste	125
3.6	Conclusion	126
4	Modélisation entière et non entière de la dynamique du conducteur par approche classique et ensembliste	127
4.1	Introduction	129
4.2	Présentation du dispositif expérimental	130
4.2.1	Fauteuil instrumenté	130
4.2.2	Fonctionnement	132
4.3	Modélisation boîte blanche de la dynamique du conducteur en cas de rejet de perturbation - approche classique	133
4.3.1	Modèle biomécanique entier du conducteur	134
4.3.1.1	Retour passif et liaison main volant	135
4.3.1.2	Retour proprioceptif	138
4.3.1.3	Retour visuel	139
4.3.2	Modèle biomécanique non entier du conducteur	140
4.3.3	Identification non paramétrique de la réponse fréquentielle	141
4.3.4	Estimation paramétrique des modèles biomécaniques	142
4.4	Modélisation boîte blanche de la dynamique du conducteur en cas de rejet de perturbation - approche ensembliste	146
4.4.1	Formulation du problème d'estimation ensembliste	148
4.4.2	Résolution du problème d'estimation ensembliste	148
4.4.2.1	Retour proprioceptif : résultats	148
4.4.2.2	Retour visuel : résultats	151
4.5	Modélisation boîte noire de la dynamique du conducteur en suivi de trajectoire - approche ensembliste	153
4.5.1	Identification non paramétrique de la réponse fréquentielle	154
4.5.2	Estimation paramétrique d'un modèle de type boîte noire	155
4.5.3	Modélisation non entière par approche ensembliste	157
4.6	Conclusion	160

Conclusion générale et perspectives	163
Bibliographie	167

Table des figures

1.1	Phénomène d'enveloppement	11
1.2	Image d'un pavé $[\mathbf{x}]$	12
1.3	Représentation de l'intervalle complexe rectangulaire $[2, 3] + j[1, 3]$	16
1.4	Représentation de l'intervalle complexe polaire $[x] = [2, 3]e^{j[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]}$	18
1.5	Représentation de l'intervalle complexe circulaire $\{2 + 2j; 1\}$	20
1.6	Illustration d'une contraction sur $[\mathbf{x}]$ obtenue avec le contracteur $\mathcal{C}$	23
1.7	Ensemble de pavés générés par SIVIA	28
2.1	Diagramme de <i>Bode</i> d'un intégrateur d'ordre 0.5	36
2.2	Diagramme de <i>Bode</i> d'un dérivateur d'ordre 0.5	38
2.3	Intégrale de <i>Riemman-Liouville</i> de la fonction $f(t) = t^2$ pour différentes valeurs de $\nu \in [\nu]$	39
2.4	Diagramme de <i>Bode</i> d'un intégrateur d'ordre 0.5 et 0.7	42
2.5	Dérivée réelle de la fonction $f(t) = t^2$ pour des différents valeurs de $\nu \in [\nu]$	44
2.6	Diagrammes de <i>Bode</i> de dérivateurs d'ordre 0.5 et 0.7	47
2.7	Tracé de la dérivée de la fonction $f_\nu(t)$ pour $\lambda = 1$ et $\nu = 0.9$	50
2.8	Tracé des réponses indicielles $y(t)$ pour $\lambda = 1$ et différentes valeurs de ν	51
2.9	Région de stabilité. Un système est stable ssi ses pôles en s^ν sont à l'intérieur du domaine grisé	56
2.10	Schéma de la boucle fermée équivalente	58
2.11	Diagramme de <i>Nichols</i> de la fonction de transfert en boucle ouverte pour des valeurs différentes de ν	59
2.12	Diagramme de <i>Bode</i> de $F_1(s) = \frac{1}{s^{1.75+1}}$	60
2.13	Régions de stabilité et de résonance du modèle non entier (2.6.14) dans le plan (ζ, ν)	65
2.14	Abaques permettant de déduire les paramètres des fonctions de transfert de deuxième espèce	68

2.15	Schéma fonctionnel pour les deux boucles fermées équivalentes	69
2.16	Schéma fonctionnel de la boucle fermée équivalente	69
2.17	Diagramme de <i>Nichols</i> pour $\zeta = -0.7$ et des différentes valeurs de ν	70
2.18	Diagrammes de <i>Nichols</i>	71
2.19	Diagramme de <i>Bode</i> pour $\zeta = -0.7$ et $\nu = 0.4$	73
2.20	Réponses impulsionnelle et indicielle pour $\zeta = -0.7$ et $\nu = 0.4$	73
2.21	Diagramme de <i>Bode</i> pour $\zeta = 2$ et $\nu = 1.9$	74
2.22	Réponses impulsionnelle et indicielle pour $\zeta = 2$ et $\nu = 1.9$	74
2.23	Diagramme de <i>Bode</i> de $F_1(s) = \frac{1}{s^{[1.7, 1.75]} + 1}$	76
2.24	Diagramme de <i>Bode</i> de $F_2(s) = \frac{1}{1 - 2 \times 0.5(s)^{[0.4, 0.5]} + (s)^{2 \cdot [0.4, 0.5]}}$	77
3.1	Fonction d'inclusion rectangulaire $\mathbb{G}_n^r$ pour un ensemble de données fréquentielles $\mathbb{G}_n$	84
3.2	Fonction d'inclusion polaire $\mathbb{G}_n^p$ pour un ensemble de données fréquentielles $\mathbb{G}_n$	85
3.3	Fonction d'inclusion circulaire $\mathbb{G}_n^d$ pour un ensemble de données fréquentielles $\mathbb{G}_n$	86
3.4	Diagrammes de <i>Nyquist</i> des vingt modèles de première espèce avec les rectangles d'incertitude correspondant	92
3.5	Diagrammes de <i>Bode</i> des vingt modèles de première espèce avec les intervalles d'incertitude correspondant	93
3.6	Diagrammes de <i>Nyquist</i> des vingt modèles de première espèce avec les intervalles d'incertitude circulaire	93
3.7	Projection en 2D de l'ensemble de solutions du CSP réel - représentation rectangulaire	95
3.8	Diagramme de <i>Nyquist</i> des mesures incertaines (en rouge) et les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\overline{\mathbb{S}}$ du CSP réel (en vert) - représentation rectangulaire	95
3.9	Projection en 2D de l'ensemble de solutions du CSP complexe - représentation rectangulaire	96
3.10	Diagramme de <i>Nyquist</i> des mesures incertaines (en rouge) et les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\overline{\mathbb{S}}$ du CSP complexe (en vert) - représentation rectangulaire	96
3.11	Comparaison des ensembles de solutions obtenus par les deux CSP projetés en 2D - représentation rectangulaire	97
3.12	Projection en 2D de l'ensemble de solutions du CSP réel - représentation polaire	99

3.13	Diagramme de <i>Bode</i> des mesures incertaines (en rouge) et les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\bar{\mathbb{S}}$ du CSP réel (en vert) - représentation polaire	99
3.14	Projection en 2D de l'ensemble de solutions du CSP complexe - représentation polaire	100
3.15	Diagramme de <i>Bode</i> des mesures incertaines (en rouge) et les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\bar{\mathbb{S}}$ (en vert) . .	100
3.16	Comparaison des ensembles de solutions obtenus à travers les deux CSP projetés en 2D - représentation polaire	101
3.17	Projection en 2D de l'ensemble de solutions du CSP complexe - représentation circulaire	102
3.18	Diagramme de <i>Nyquist</i> des mesures incertaines (en rouge) et des réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\bar{\mathbb{S}}$ du CSP complexe (en vert) - représentation circulaire	103
3.19	Comparaison des ensembles de solutions obtenus par les trois représentations projetés en 2D - première espèce	104
3.20	Diagrammes de <i>Nyquist</i> des vingt modèles de deuxième espèce avec les rectangles d'incertitude correspondant	106
3.21	Diagrammes de <i>Bode</i> des vingt modèles de deuxième espèce avec les intervalles d'incertitude correspondant	106
3.22	Diagrammes de <i>Nyquist</i> des vingt modèles de deuxième espèce avec les intervalles d'incertitude circulaire	107
3.23	Projection en 2D de l'ensemble de solutions du CSP réel - représentation rectangulaire	108
3.24	Diagramme de <i>Nyquist</i> des mesures incertaines (en rouge) et les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\bar{\mathbb{S}}$ du CSP réel (en vert) - représentation rectangulaire	109
3.25	Projection en 2D de l'ensemble de solutions du CSP complexe - représentation rectangulaire	110
3.26	Diagramme de <i>Nyquist</i> des mesures incertaines (en rouge) et les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\bar{\mathbb{S}}$ du CSP complexe (en vert) - représentation rectangulaire	110
3.27	Comparaison des ensembles de solutions obtenus par les deux CSP projetés en 2D - représentation rectangulaire	111
3.28	Projection en 2D de l'ensemble de solutions du CSP réel - représentation polaire	113

3.29	Diagramme de <i>Bode</i> des mesures incertaines (en rouge) et les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\overline{\mathbb{S}}$ du CSP réel (en vert) - représentation polaire	113
3.30	Projection en 2D de l'ensemble de solutions CSP complexe - représentation polaire	114
3.31	Diagramme de <i>Bode</i> des mesures incertaines (en rouge) et les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\overline{\mathbb{S}}$ du CSP complexe (en vert) - représentation polaire	115
3.32	Comparaison des ensembles de solutions obtenus par les deux CSP projetés en 2D - représentation polaire	115
3.33	Projection en 2D de l'ensemble de solutions du CSP complexe - représentation circulaire	116
3.34	Diagramme de <i>Nyquist</i> des mesures incertaines (en rouge) et les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\overline{\mathbb{S}}$ du CSP complexe (en vert) - représentation circulaire	117
3.35	Comparaison des ensembles de solutions obtenus par les trois représentations projetés en 2D - deuxième espèce	118
3.36	Photographie d'un système thermique isolé équipé d'une résistance chauffante et des sondes de mesures	119
3.37	Schéma du barreau en aluminium isolé (section - bleu), résistance chauffante (rouge), isolation de la résistance (vert)	119
3.38	Réponse du barreau thermique pour un échelon de flux d'amplitude $5kW.m^{-2}$.	120
3.39	Signaux d'entrée/sortie du banc d'essai thermique	121
3.40	Gain et phase de la réponse fréquentielle du barreau thermique	122
3.41	Gain et phase de la réponse fréquentielle du barreau thermique (en bleu) et du modèle paramétrique (en rouge)	123
3.42	Gain et phase de la réponse fréquentielle du barreau thermique en bleu et intervalles de confiance à 3 écarts-types en rouge	124
3.43	Projection en 2D de l'ensemble de solutions obtenu	125
3.44	Diagramme de <i>Bode</i> des mesures incertaines (en rouge) et les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\overline{\mathbb{S}}$ (en vert) . .	126
4.1	Vues d'ensemble du fauteuil instrumenté	131
4.2	Illustration du potentiel du fauteuil instrumenté	131
4.3	Schéma fonctionnel du fauteuil instrumenté	132

4.4	Schéma fonctionnel du dispositif vu de la partie commande	133
4.5	Schéma fonctionnel du bloc conducteur	134
4.6	Modèle à 2 ddl de l'ensemble bras-volant-moteur, l'interface mains-volant étant modélisée par une liaison viscoélastique	135
4.7	Schéma fonctionnel respectant les causalités intégrales de la partie retour passif de la figure 4.5	136
4.8	Schéma fonctionnel respectant les causalités intégrales de la liaison mains/volant de la figure 4.5	137
4.9	Schéma fonctionnel du conducteur correspondant à la première étape du protocole expérimental	137
4.10	Schéma fonctionnel du conducteur correspondant à la deuxième étape du protocole expérimental	138
4.11	Schéma fonctionnel du conducteur correspondant à la troisième étape du protocole expérimental	139
4.12	Réponses temporelles et fréquentielles obtenues suivant les étapes du protocole expérimental	142
4.13	Modèles entiers et non entiers estimés pour les trois parties du protocole expérimental	144
4.14	Réponses temporelles recueillies à partir de I expérimentations pour un retour passif, proprioceptif et visuel	147
4.15	Diagramme de <i>Bode</i> du conducteur (en bleu) et intervalles de confiance à 3 écarts-types (en rouge) - retour proprioceptif	149
4.16	Diagramme de <i>Bode</i> du conducteur (en bleu) et union des intervalles de confiance à 3 écarts-types (en rouge) - retour proprioceptif	149
4.17	Projection en 2D des solutions obtenues dans le cas du retour proprioceptif	150
4.18	Diagramme de <i>Bode</i> des mesures incertaines (en rouge) et réponses en fréquence des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\bar{\mathbb{S}}$ (en vert) - retour proprioceptif	151
4.19	Diagramme de <i>Bode</i> du conducteur (en bleu) et intervalles de confiance à 3 écarts-types (en rouge)-retour visuel	151
4.20	Diagramme de <i>Bode</i> du conducteur (en bleu) et union des intervalles de confiance à 3 écarts-types (en rouge) - retour visuel	152
4.21	Projection en 2D des solutions obtenues dans le cas du retour visuel	152

4.22	Diagramme de <i>Bode</i> des mesures incertaines (en rouge) et réponses en fréquence des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\overline{\mathbb{S}}$ (en vert) - retour visuel	153
4.23	Projection de la consigne (en rouge) et de l'angle au volant (en bleu) lors d'un essai	154
4.24	Réponses temporelles recueillies et densité spectrale de puissance du signal d'entrée	155
4.25	Diagramme de <i>Bode</i> du conducteur dans un cas de suivi de trajectoire	155
4.26	Réponses fréquentielles gain et phase avec les modèles paramétriques entier et non entier	156
4.27	Réponses temporelles recueillies issus de dix expériences	157
4.28	Diagramme de <i>Bode</i> du conducteur (en bleu) et intervalles de confiance à 3 écarts-types dans le cas de suivi de trajectoire	158
4.29	Diagramme de <i>Bode</i> du conducteur en bleu et union des intervalles de confiance à 3 écarts-types en rouge dans le cas de suivi de trajectoire	158
4.30	Projection en 2D de l'ensemble de solutions obtenues dans le cas de suivi de trajectoire	160
4.31	Diagramme de <i>Bode</i> des mesures incertaines (en rouge) et réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieur $\overline{\mathbb{S}}$ (en vert) dans le cas de suivi de trajectoire	160

Liste des tableaux

1.1	Comparatif des fonctions d'inclusion, $\Delta[f](\mathbf{x}) = w([f](\mathbf{x})) - w(f(\mathbf{x}))$. . .	15
2.1	Table de variation du gain et de la phase de l'intégrateur par intervalle en fonction de $[\nu]$	41
2.2	Table de variation du gain et de la phase du dérivateur par intervalles en fonction de $[\nu]$	46
3.1	Comparaison du CSP réel et complexe de la représentation rectangulaire sur le modèle de première espèce	97
3.2	Comparaison des CSP réel et complexe de la représentation polaire sur le modèle de première espèce	101
3.3	Comparaison des intervalles d'inclusion des paramètres du modèle de première espèce, obtenus des trois représentations	103
3.4	Comparaison du CSP réel et complexe de la représentation rectangulaire sur le modèle de deuxième espèce	111
3.5	Comparaison des CSP réel et complexe de la représentation polaire sur le modèle du deuxième espèce	114
3.6	Comparaison des intervalles d'inclusion des paramètres du modèle de deuxième espèce obtenus avec les trois représentations	117
4.1	Résultat de l'estimation paramétrique avec $\alpha = 0.5$ - retour passif	143
4.2	Résultat de l'estimation paramétrique avec $\alpha = 0.5$ - retour proprioceptif . . .	145
4.3	Résultat de l'estimation paramétrique avec $\alpha = 0.5$ - retour visuel	145
4.4	Résultat de l'estimation paramétrique pour le modèle entier et non entier dans le cas de suivi de trajectoire	156

Introduction générale et organisation de la thèse

Contexte

Les concepts de la dérivation et de l'intégration non entières datent de 1695 quand *L'Hôpital*, *Leibniz* et *Bernoulli* ont échangé sur la signification des *différentielles qui ont pour exposant des nombres rompus*¹. Au 18e siècle, il y a eu peu de contributions sur ce sujet, néanmoins *Euler* a soulevé le problème de la définition d'une dérivée d'ordre fractionnaire. En 1832, *Liouville* a réussi à trouver une interprétation physique de ce concept qualifié de métaphysique par *Leibniz*, par le biais de l'analyse dimensionnelle en réécrivant la loi de *Biot* et *Savart* pour une surface de dimension deux [?]. Suite à de nombreuses réflexions de *Cauchy*, *Lagrange*, *Fourier*, *Abel*, *Liouville*, *Riemann*, *Hardy*, . . . , la dérivation et l'intégration non entières ont été analytiquement définies.

Des avancées majeures dans la dérivation non entière ont été réalisées durant la deuxième moitié du 20e siècle, notamment dans des domaines aussi variés que :

- l'Automatique, à travers l'identification non entière permettant d'obtenir des modèles compacts de systèmes à dimension infinie, la commande CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) à travers l'introduction de l'ordre de dérivation complexe pour une meilleure robustesse, et la planification de trajectoire par potentiel généralisé [?], et par platitude [?],
- le traitement du signal, à travers la synthèse d'un bruit fractal [?],
- les Sciences Pour l'Ingénieur et notamment en mécanique, à travers la suspension CRONE et ses performances en terme d'isolation vibratoire [?], [?], en thermique à travers la modélisation de la diffusion du flux [?], en électrochimie, à travers la modélisation de la diffusion de charge dans les batteries [?], en biologie à travers la modélisation de muscles [?], etc.

¹extrait de la lettre datée du 10 Janvier 1695 de *Bernoulli* adressée au marquis de *L'Hôpital*

Cette thèse s'inscrit dans la continuité des travaux de l'équipe CRONE sur l'identification par modèles non entiers [?, ?, ?, ?]. En effet, les méthodes d'estimation *classiques*, autrement dit *les méthodes qui résultent sur une estimée ponctuelle des paramètres*, se basent souvent sur des approches stochastiques avec des hypothèses *a priori* sur les incertitudes et le bruit (bruit gaussien). Or, en pratique, de telles hypothèses ne sont généralement pas vérifiées pour plusieurs raisons, comme la présence d'erreurs de modélisation déterministes qui ne peuvent pas être considérées comme variables stochastiques.

Une alternative consiste alors à borner l'erreur ; l'estimation paramétrique peut alors se faire par une approche ensembliste. Ce choix est plus judicieux lorsqu'une connaissance *a priori* ne permet pas de considérer de bruit additif gaussien. La différence entre les approches ensemblistes et les approches classiques d'estimation réside dans le résultat obtenu qui n'est plus un vecteur de paramètres ponctuel, mais un ensemble de valeurs acceptables contenant, d'une manière garantie, le vecteur des "vrais" paramètres. L'idée de borner une erreur en utilisant des intervalles a été initiée par [?] et [?] dans le but de quantifier les erreurs numériques dues à la représentation finie des nombres réels sur un calculateur. Plusieurs études par la suite se sont basées sur ces outils pour développer des méthodes de résolution numérique permettant de manipuler les incertitudes sur les données et de calculer des solutions garanties.

Objectifs de la thèse

Les travaux de cette thèse traitent de la modélisation de systèmes par fonctions de transfert non entières à partir de données fréquentielles incertaines et bornées. A cet effet, les définitions d'intégration et de dérivation non entières sont d'abord étendues aux intervalles. Puis des approches ensemblistes sont appliquées pour l'estimation de l'ensemble des coefficients et des ordres de dérivation sous la forme d'intervalles. Ces approches s'appliquent pour l'estimation des paramètres de systèmes linéaires invariants dans le temps (LTI) certains, systèmes LTI incertains et systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps (LPV). L'estimation paramétrique par approche ensembliste est particulièrement adaptée à la modélisation de la dynamique du conducteur, car les études sur un, voire plusieurs, individus montrent que les réactions recueillies ne sont jamais identiques mais varient d'une expérience à l'autre, voire d'un individu à l'autre.

Contributions spécifiques et organisation de la thèse

La progression de la thèse est ponctuée par quatre chapitres dont le contenu est présenté ici de manière introductive.

Le chapitre 1 est consacré à l'analyse par intervalles, thématique nouvelle dans l'équipe CRONE, nécessaire à l'extension des définitions de l'intégration et de la dérivation par intervalle au chapitre 2 et à l'estimation ensembliste à partir de données fréquentielles aux chapitres 3 et 4. Dans un premier temps, l'arithmétique des intervalles réels et complexes est présentée ainsi que les problèmes afférents à la manipulation de ces intervalles tels que le pessimisme et l'enveloppement. Les intervalles complexes sont abordés à travers trois modes de représentation : rectangulaire, polaire et circulaire. L'utilisation de l'arithmétique des intervalles dans le contexte d'inversion ensembliste réelle et complexe par contraction et bisection y est également présentée.

Le chapitre 2 présente les principaux outils pour la modélisation de systèmes à dérivées non entières réelles, puis par intervalles. Les définitions, devenues usuelles, de l'intégration et de la dérivation non entières sont d'abord rappelées puis étendues à des intervalles ce qui constitue une première originalité de cette thèse. Les transformées de *Laplace* des opérateurs de dérivation et d'intégration par intervalle y sont calculées et leur monotonie par rapport à l'ordre de dérivation étudiée. S'ensuit l'étude de stabilité et de résonance de fonctions de transfert élémentaires de première et de deuxième espèce, qui constitue une autre contribution originale de cette thèse, la connaissance des comportements fréquentiels des fonctions de transfert élémentaires étant indispensable pour la modélisation de systèmes non entiers à partir de données fréquentielles. Une généralisation des fonctions de transfert élémentaires à des ordres de dérivation par intervalles y est également présentée.

Dans **le chapitre 3**, nos contributions se sont orientées vers l'estimation ensembliste de paramètres de fonctions de transfert non entières à partir de données fréquentielles incertaines et bornées. L'ensemble de paramètres (coefficients et ordres de dérivation) est donc caractérisé sous la forme d'intervalles à partir des représentations rectangulaire, polaire et circulaire des intervalles complexes. La fusion des résultats issus de ces représentations permet d'obtenir un ensemble de solutions plus petit, car chaque représentation introduit du pessimisme différemment. Cette estimation ensembliste peut s'appliquer pour la modélisation de systèmes linéaires invariants dans le temps (LTI) certains, de systèmes LTI incertains, et de systèmes à paramètres

variant dans le temps (LPV). Enfin, une application à l'estimation ensembliste des paramètres d'un système de diffusion thermique dans un barreau d'aluminium est présentée. La réponse fréquentielle du système, ainsi que les incertitudes à plus ou moins trois écarts-types, sont d'abord estimées par une identification non paramétrique. L'estimation ensembliste est ensuite appliquée sur la réponse fréquentielle pour obtenir l'ensemble de solutions.

Le chapitre 4 est consacré à la modélisation de la dynamique du conducteur de véhicule, l'objectif étant de disposer à terme d'une bibliothèque de modèles utilisables dans le cadre du Contrôle Global du Châssis (CGC) et éventuellement de détecter des comportements anormaux de conducteurs. Deux démarches méthodologiques y sont développées. La première est basée sur une modélisation de type boîte blanche de la dynamique du conducteur en rejet de perturbation où le conducteur, soumis à des perturbations de type rafale de vent, tente de les annuler. L'introduction de la dérivée non entière, pour la modélisation de phénomène visco-élastique, permet alors d'améliorer le critère d'estimation. De plus, les études sur un, voire plusieurs, individu(s) montrent que les réactions (ou réponses) recueillies ne sont jamais identiques. Elles varient, non seulement d'un conducteur à l'autre, mais aussi d'une expérience à l'autre pour le même conducteur. Il est alors préférable de rechercher un ensemble de modèles faisables d'un, voire plusieurs, conducteur(s) plutôt qu'un modèle unique. Une approche ensembliste est alors adoptée. Dans la mesure où une modélisation de type boîte blanche introduit un grand nombre de paramètres, la seconde démarche méthodologique est basée sur une modélisation de type boîte noire de la dynamique du conducteur en suivi de trajectoire où le conducteur minimise l'écart entre une trajectoire de consigne, projetée à l'écran, et l'angle au volant. Cette modélisation permet de diminuer significativement le nombre de paramètres et d'appliquer plus facilement les algorithmes d'estimation ensembliste développés au chapitre 3.

Notations

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}_+$	Ensemble des nombres réels positifs
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes
$\mathbb{IR}$	Ensemble des intervalles réels
$[x]$	intervalle de x
$\bar{x}$	borne supérieure de $[x]$
$\underline{x}$	borne inférieure de $[x]$
$w([x])$	largeur d'un intervalle $[x]$
$\text{mid}([x])$	milieu d'un intervalle $[x]$
$\text{rad}([x])$	rayon d'un intervalle $[x]$
$[\mathbf{x}]$	vecteur d'intervalle (pavé)
$\mathbb{R}(\mathbb{C})$	Ensemble des intervalles complexes rectangulaires
$\mathbb{S}(\mathbb{C})$	Ensemble des intervalles complexes polaires (secteurs)
$\mathbb{K}(\mathbb{C})$	Ensemble des intervalles complexes circulaires (disques)
$\mathbb{D}$	Domaine de définition
J	le Jacobien
H	l'Hessien
$[f]$	fonction d'inclusion de la fonction f
CSP	Problème de satisfaction de contrainte ; Constraint Satisfaction Problem
$\mathcal{C}$	Contracteur
$\mathcal{C}_{\downarrow\uparrow}$	Contracteur de propagation/retropropagation
$\mathbb{S}$	Ensemble de solutions
$\bar{\mathbb{S}}$	approximation exérieure de l'ensemble de solutions
$\underline{\mathbb{S}}$	approximation intérieure de l'ensemble de solutions

SIVIA	Inversion ensembliste par analyse par intervalle ; Set Inversion Via Interval Analysis
ν	ordre réel
$[\nu]$	intervalle réel
$\lfloor \nu \rfloor$	le plus grand entier inférieur ou égal à ν
I	opérateur d'intégration
D	opérateur de dérivation
I'	opérateur d'intégration d'ordre ν
D'	opérateur de dérivation d'ordre ν
$\Re(z)$	partie réelle du nombre complexe z
$\Im(z)$	partie imaginaire du nombre complexe z
$ z $	module du nombre complexe z
$\arg(z)$	argument du nombre complexe z
$\mathcal{L}$	transformée de <i>Laplace</i>
Γ	fonction d' <i>Euler</i>
Ψ	fonction digamma
ζ	pseudo-facteur d'amortissement
BIBO	entrée bornée sortie bornée ; (Bounded Input Bounded Output)
ssi	si et seulement si
SBPA	Séquence Binaire Pseudo Aléatoire

Chapitre 1

Analyse par intervalles

Sommaire

1.1	Introduction	8
1.2	Arithmétique des intervalles réels	8
1.2.1	Intervalles	8
1.2.2	Pessimisme	9
1.2.3	Fonction d'inclusion	11
1.3	Arithmétique des intervalles complexes	16
1.3.1	Représentation rectangulaire	16
1.3.2	Représentation polaire	17
1.3.3	Représentation circulaire	19
1.4	Inversion ensembliste par arithmétique des intervalles	21
1.4.1	Problème de satisfaction de contraintes	21
1.4.2	Inversion ensembliste par contraction	22
1.4.3	Inversion ensembliste par bisection	26
1.4.4	SIVIA avec contracteur	28
1.5	Solvers et boîtes à outils	29
1.5.1	C-XSC	29
1.5.2	INTLAB	29
1.5.3	QUIMPER	29
1.6	Conclusion	30

1.1 Introduction

Le concept de l'analyse par intervalles représente principalement un raisonnement sur des intervalles de nombres réels et complexes, où l'idée est d'inclure un ensemble de nombres réels ou complexes dans des intervalles de bornes connues. Dans certains domaines de la physique, établir un modèle mathématique avec des paramètres incertains représentés sous forme d'intervalle s'avère bien utile.

L'idée de borner une erreur en utilisant des intervalles a été initiée par [?] et [?] dans le but de quantifier les erreurs numériques dues à la représentation finie des nombres réels sur un ordinateur. Plusieurs études par la suite se sont basées sur ces outils pour développer des méthodes de résolution numérique permettant de manipuler les incertitudes sur les données et de garantir l'appartenance des solutions à des intervalles de bornes connues.

Ce chapitre est consacré à l'analyse par intervalles, thématique nouvelle dans l'équipe CRONE, nécessaire à l'extension des définitions de l'intégration et de la dérivation par intervalle au chapitre 2 et à l'estimation ensembliste à partir de données fréquentielles au chapitre 3 et 4. Les méthodes de résolution de problèmes sont formulées sous la forme d'un système de contraintes où les variables sont représentées sous la forme d'intervalles. Les paragraphes 1.2 et 1.3 rappellent les définitions des intervalles réels et complexes, et présentent les opérations arithmétiques de base et les problèmes rencontrés lors de la manipulation de ces intervalles. Les différents modes de représentation des intervalles complexes y sont aussi également rappelés. L'utilisation de l'arithmétique des intervalles dans le contexte d'inversion ensembliste par contraction et par bisection est présentée au paragraphe 1.4.

1.2 Arithmétique des intervalles réels

1.2.1 Intervalles

Un intervalle $[x]$ de borne inférieure $\underline{x} \in \mathbb{R}$ et de borne supérieure $\overline{x} \in \mathbb{R}$ est un ensemble connexe et borné de $\mathbb{R}$ défini par :

$$[x] = [\underline{x}, \overline{x}] = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \underline{x} \leq x \leq \overline{x} \right\}. \quad (1.2.1)$$

L'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ est noté $\mathbb{IR}$. Un intervalle est dégénéré lorsque $\underline{x} = \overline{x}$.

Les opérations arithmétiques de base ont été étendues aux ensembles d'intervalles. En effet, une opération quelconque $\circ$ entre deux intervalles x et y est :

$$[x] \circ [y] = \{ x \circ y \mid x \in [x] \text{ et } y \in [y] \}, \quad (1.2.2)$$

pour $\circ \in \{+, -, \times, /\}$, le récapitulatif des opérations sur les intervalles est donné par [?] :

$$[x] + [y] = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}], \quad (1.2.3)$$

$$[x] - [y] = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}], \quad (1.2.4)$$

$$[x] \times [y] = [\min(\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}), \max(\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y})], \quad (1.2.5)$$

$$[x]/[y] = \begin{cases} [x] \times \left[\frac{1}{\bar{y}}, \frac{1}{\underline{y}}\right], & \text{si } 0 \notin [y], \\ [x] \times \left[\frac{1}{\bar{y}}, +\infty\right], & \text{si } \underline{y} = 0 \text{ et } \bar{y} > 0, \\ [x] \times \left[-\infty, \frac{1}{\underline{y}}\right], & \text{si } \underline{y} < 0 \text{ et } \bar{y} = 0, \\] - \infty, +\infty[, & \text{si } \underline{y} < 0 \text{ et } \bar{y} > 0. \end{cases} \quad (1.2.6)$$

Soit $[x]$ un intervalle appartenant à $\mathbb{IR}$, on définit :

- la borne inférieure : $\inf([x]) = \underline{x}$;
- la borne supérieure : $\sup([x]) = \bar{x}$;
- la largeur : $w([x]) = \bar{x} - \underline{x} \geq 0$;
- le milieu : $\text{mid}([x]) = (\bar{x} + \underline{x})/2$;
- le rayon : $\text{rad}([x]) = (\bar{x} - \underline{x})/2 \geq 0$.

Vecteurs d'intervalles

Un vecteur d'intervalle ou un pavé $[\mathbf{x}]$ de $\mathbb{IR}^n$ est un vecteur dont les éléments sont des intervalles, $[\mathbf{x}] = ([x_1], [x_2], \dots, [x_n])^T$. Soit $[\mathbf{x}]$ un vecteur d'intervalle $\in \mathbb{IR}^n$, on définit :

- la borne inférieure : $\inf([\mathbf{x}]) = (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n)^T$;
- la borne supérieure : $\sup([\mathbf{x}]) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$;
- la largeur : $\omega([\mathbf{x}]) = \max_{i=1, \dots, n} \omega([x_i])$;
- le milieu : $\text{mid}([\mathbf{x}]) = (\text{mid}([x_1]), \text{mid}([x_2]), \dots, \text{mid}([x_n]))^T$;
- le volume : $\text{vol}([\mathbf{x}]) = \omega([x_1])\omega([x_2]) \dots \omega([x_n])$.

1.2.2 Pessimisme

Le résultat d'une suite d'opérations entre deux ou plusieurs intervalles n'est cependant pas minimal, l'intervalle obtenu est donc souvent pessimiste. Ce problème est dû principalement à deux phénomènes : la *dépendance* et l'*enveloppement*.

1.2.2.1 Phénomène de dépendance

Soit un intervalle non dégénéré $[x] = [\underline{x}, \bar{x}]$ et une opération $\circ \in \{+, -, \times, /\}$, alors en utilisant la définition (1.2.2), on obtient :

$$[x] \circ [x] = \{x \circ y \mid x \in [x] \text{ et } y \in [x]\}. \quad (1.2.7)$$

D'après (1.2.7), les variables x et y sont considérées comme différentes bien que l'intervalle manipulé soit le même ; ce phénomène est appelé phénomène de *dépendance*.

Par exemple l'évaluation par intervalle de l'expressions, quand $[x] = [-1, 1]$,

$$[x] - [x] + [x] = [-1, 1] - [-1, 1] + [-1, 1] = [-3, 3] \neq [-1, 1]. \quad (1.2.8)$$

L'intervalle solution est dépendant du nombre d'occurrence de la variable x .

$$[x] + [x] - [x] = \{a + b + c \mid a \in [x], b \in [x], c \in [x]\} \quad (1.2.9)$$

L'expression (1.2.9) correspond donc à l'ensemble des réels $a + b - c$ pour tout a , b et c pris chacun séparément dans l'intervalle $[-1, 1]$, et non pas à l'ensemble des réels avec $a = b = c$. Du fait de ce phénomène de dépendance, il faut veiller à limiter le nombre d'occurrences de chaque variable afin d'obtenir des intervalles plus petits. Par exemple, il est souhaitable d'évaluer $[x^2] = \{x^2 \mid x \in [x]\}$ au lieu de $\{x * x \mid x \in [x]\}$.

1.2.2.2 Phénomène d'enveloppement

L'effet d'enveloppement est le phénomène qui caractérise le pessimisme dû à la représentation d'un ensemble quelconque par un pavé (vecteur d'intervalle).

Exemple :

Soient

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{x}] = \begin{pmatrix} [0, 1] \\ [2, 3] \end{pmatrix}.$$

L'évaluation du pavé $[\mathbf{y}] = \mathbb{A}[\mathbf{x}]$ est donnée par :

$$[\mathbf{y}] = \begin{pmatrix} [2, 4] \\ [2, 3] \end{pmatrix}.$$

L'ensemble exact $\mathbb{B} = \{\mathbb{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in [\mathbf{x}]\}$ est donné par le parallélogramme, dont les côtés ne sont pas parallèles aux axes du repère. Par conséquent, la représentation de ce parallélogramme en l'enveloppant par le rectangle $[\mathbf{y}]$ introduit du pessimisme comme le montre la figure 1.1.

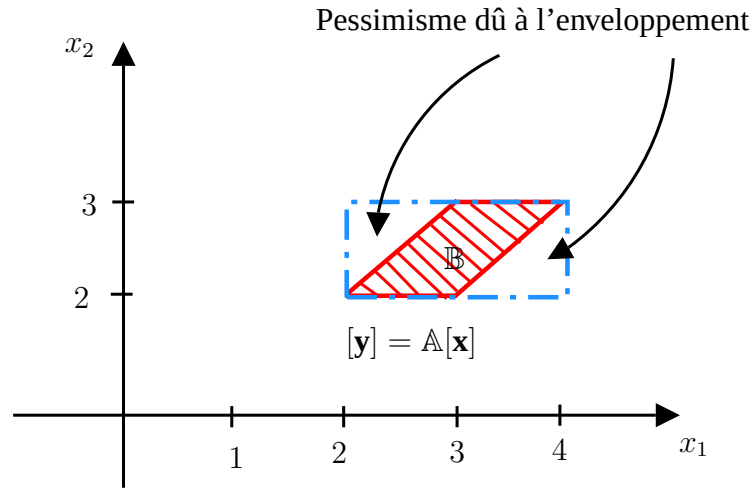


FIG. 1.1 – Phénomène d'enveloppement

1.2.3 Fonction d'inclusion

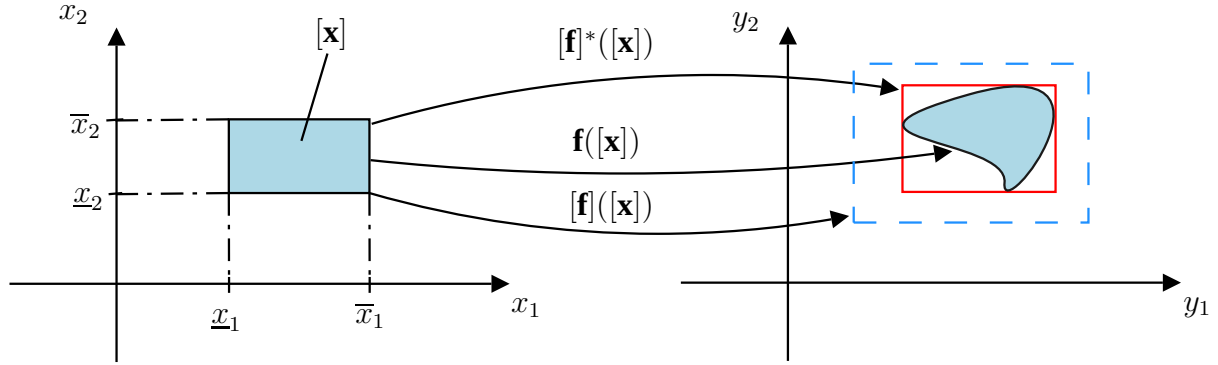
Soit $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction vectorielle contenant un nombre fini d'opérations arithmétiques et de fonctions élémentaires ($\cos$, $\sin$, $\log$, $\exp$, ...). L'évaluation de $\mathbf{f}$ sur un pavé $[\mathbf{x}]$ est donnée par l'ensemble :

$$\mathbf{f}([\mathbf{x}]) = \{\mathbf{f}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in [\mathbf{x}]\}. \quad (1.2.10)$$

Une fonction d'inclusion de $\mathbf{f}$ notée par $[\mathbf{f}]$ est une fonction de $\mathbb{IR}^n$ dans $\mathbb{IR}^m$ vérifiant :

$$\mathbf{f}([\mathbf{x}]) \subseteq [\mathbf{f}]([\mathbf{x}]). \quad (1.2.11)$$

En général, la fonction d'inclusion n'est pas unique et dépend de la manière dont $\mathbf{f}$ est écrite. L'objectif de l'analyse par intervalles est de pouvoir utiliser des fonctions d'inclusion peu pessimistes de manière à ce que la taille de $([\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) - \mathbf{f}([\mathbf{x}]))$ soit petite. La fonction d'inclusion est minimale (la moins pessimiste), si $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}])$ est le plus petit pavé qui borne $\mathbf{f}([\mathbf{x}])$. La figure 1.2 montre l'évaluation des fonctions d'inclusion de l'image d'un pavé $[\mathbf{x}]$ obtenu à partir d'une fonction $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. La fonction d'inclusion minimale $[\mathbf{f}]^*$ est le pavé en trait continu rouge. Le pavé représenté par un trait discontinu bleu est une inclusion non minimale de $\mathbf{f}([\mathbf{x}])$.


 FIG. 1.2 – Image d'un pavé $[x]$

1.2.3.1 Fonction d'inclusion des fonctions élémentaires

La construction des fonctions d'inclusion pour les fonctions élémentaires ($\cos$, $\sin$, $\log$, $\exp$, ...) est basée sur la propriété de monotonie. En effet, si f est une fonction continue monotone sur un intervalle $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$, alors la fonction intervalle qui, à tout intervalle $[x] \subset \mathbb{D}$ associe l'intervalle $[f(\underline{x}), f(\overline{x})]$ est une fonction d'inclusion minimale de f (la fonction qui donne l'évaluation la moins pessimiste).

Exemple 1.2.1 – soit $f(x) = \log(x)$: la fonction logarithme est continue et monotone sur le domaine de définition $\mathbb{D} =]0, +\infty[$, alors

$$\forall [x] = [\underline{x}, \overline{x}] \in \mathbb{D}, \log([x]) = [\log(\underline{x}), \log(\overline{x})]; \quad (1.2.12)$$

– soit $f(x) = \exp(x)$: la fonction exponentielle est continue et monotone sur le domaine de définition $\mathbb{D} =]-\infty, +\infty[$ alors

$$\forall [x] = [\underline{x}, \overline{x}] \in \mathbb{D}, \exp([x]) = [\exp(\underline{x}), \exp(\overline{x})]; \quad (1.2.13)$$

– soit $f(x) = \cos(x)$: la fonction cosinus est continue et monotoniquement décroissante sur le domaine de définition $\mathbb{D}_1 =]0, \pi[$ alors

$$\forall [x] = [\underline{x}, \overline{x}] \in \mathbb{D}_1, \cos([x]) = [\cos(\overline{x}), \cos(\underline{x})]; \quad (1.2.14)$$

et sur le domaine $\mathbb{D}_2 =]\pi, 2\pi[$ la fonction cosinus est continue et monotoniquement croissante, alors

$$\forall [x] = [\underline{x}, \overline{x}] \in \mathbb{D}_2, \cos([x]) = [\cos(\underline{x}), \cos(\overline{x})]. \quad (1.2.15)$$

1.2.3.2 Fonction d'inclusion naturelle

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, la fonction d'inclusion naturelle $[f]$ de f s'obtient en remplaçant chaque variable réelle x_i par sa variable intervalle correspondante $[x_i]$ et chaque opération arithmétique par son équivalent intervalle. La fonction d'inclusion naturelle est minimale si f est monotone continue et chaque variable n'apparaît qu'une seule fois.

Exemple 1.2.2 Soit une fonction f écrite en utilisant ces deux expressions :

$$f_1(x) = 2x^2 - 2x - 1, \quad (1.2.16)$$

$$f_2(x) = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{3}{2}. \quad (1.2.17)$$

L'évaluation des fonctions d'inclusion naturelles de ces deux expressions sur l'intervalle $[x] = [-1, 1]$ donne :

$$[f_1]([x]) = 2[x]^2 - 2[x] - 1 = [-3, 5], \quad (1.2.18)$$

$$[f_2]([x]) = 2 \left([x] - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{3}{2} = [-1.5, 3]. \quad (1.2.19)$$

La taille des intervalles obtenus par ces deux fonctions d'inclusion dépend de l'expression utilisée pour l'écriture de f . Ceci est dû au phénomène de dépendance expliqué auparavant. Comme la fonction f est continue, la fonction d'inclusion naturelle est minimale lorsque le nombre d'occurrences des variables est égal à un. Dans cet exemple, la fonction d'inclusion naturelle f_2 est minimale ; elle permet de trouver le plus petit intervalle contenant l'image de x par f .

1.2.3.3 Fonction d'inclusion centrée

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur un domaine $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$. On considère un pavé $[\mathbf{x}] \subset \mathbb{D}$ le centre de ce pavé est $c([\mathbf{x}])$, en utilisant le théorème de la valeur moyenne, on obtient :

$$\forall \mathbf{x} \in [\mathbf{x}], \exists \zeta \in [\mathbf{x}] \mid f(\mathbf{x}) = f(c([\mathbf{x}])) + \mathbf{J}(\zeta)(\mathbf{x} - c([\mathbf{x}])), \quad (1.2.20)$$

où $\mathbf{J}$ est le Jacobien de la fonction f . Si une fonction d'inclusion $[\mathbf{J}]$ de $\mathbf{J}$ est disponible, alors :

$$\forall \mathbf{x} \in [\mathbf{x}], f(\mathbf{x}) \in f(c([\mathbf{x}])) + [\mathbf{J}]([\mathbf{x}])(\mathbf{x} - c([\mathbf{x}])), \quad (1.2.21)$$

par suite :

$$f([\mathbf{x}]) \subseteq f(c([\mathbf{x}])) + [\mathbf{J}]([\mathbf{x}])([\mathbf{x}] - c([\mathbf{x}])). \quad (1.2.22)$$

Le terme de droite dans l'expression (1.2.22) est appelé fonction d'inclusion centrée de f notée par $[f_c]$.

$$f(\mathbf{x}) \subseteq [f_c](\mathbf{x}) = f(c(\mathbf{x})) + [\mathbf{J}](\mathbf{x})(\mathbf{x} - c(\mathbf{x})). \quad (1.2.23)$$

1.2.3.4 Fonction d'inclusion de Taylor

Les fonctions d'inclusion de Taylor sont obtenues en utilisant un ordre de dérivation plus élevé [?]. A titre d'exemple, on donne ici la fonction d'inclusion de Taylor du second ordre :

$$[f_T](\mathbf{x}) = f(c(\mathbf{x})) + [\mathbf{J}](\mathbf{x})(\mathbf{x} - c(\mathbf{x})) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - c(\mathbf{x}))^T [\mathbf{H}](\mathbf{x})(\mathbf{x} - c(\mathbf{x})), \quad (1.2.24)$$

où $[H]$ est une fonction d'inclusion du Hessien de la fonction f .

Les fonctions d'inclusion centrée et de Taylor sont généralement utilisées lorsque la taille des intervalles manipulés est assez petite.

Exemple 1.2.3 Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 \exp(x_2) - x_2^2,$$

avec x_1 et x_2 inclus dans $[x_1]$ et $[x_2]$ respectivement. Les approximations de f sont obtenues en utilisant la fonction d'inclusion naturelle $[f]_n$, centrée $[f]_c$, et celle de Taylor d'ordre deux $[f]_T$, elles sont comparées à la fonction d'inclusion minimale $[f]^*$.

Les trois fonctions d'inclusion sont données par :

$$[f]_n(\mathbf{x}) = [x_1]^2 + [x_1] \exp([x_2]) - [x_2]^2,$$

$$[f]_c(\mathbf{x}) = f(c(\mathbf{x})) + [\mathbf{J}](\mathbf{x}) \times (\mathbf{x} - c(\mathbf{x})),$$

$$[f]_T(\mathbf{x}) = f(c(\mathbf{x})) + [\mathbf{J}](\mathbf{x}) \times (\mathbf{x} - c(\mathbf{x})) + [\mathbf{H}](\mathbf{x}) \frac{(\mathbf{x} - c(\mathbf{x}))^2}{2}.$$

Les fonctions d'inclusion pour le Jacobien et le Hessien sont données par :

$$[\mathbf{J}](\mathbf{x}) = (2 \times [x_1] + \exp([x_2]) \quad - 2 \times [x_2] + [x_1] \exp([x_2])),$$

$$[\mathbf{H}](\mathbf{x}) = (2 \quad - 2 + [x_1] \exp([x_2])).$$

TAB. 1.1 – Comparatif des fonctions d’inclusion, $\Delta[f](\mathbf{x}) = w([f](\mathbf{x})) - w(f(\mathbf{x}))$.

	$[x_1] = [0.5, 1.5]; [x_2] = [1.5, 2.5]$	$[y_1] = [0.9, 1.1]; [y_2] = [1.9, 2.1]$		
$[f]$	$[f](\mathbf{x})$	$\Delta[f](\mathbf{x})$	$[f](\mathbf{y})$	$\Delta[f](\mathbf{y})$
$[f]_n$	$[-3.75, 18.27]$	7.99	$[2.41, 6.58]$	1.60
$[f]_c$	$[-10.83, 19.61]$	16.51	$[2.83, 5.94]$	0.54
$[f]_T$	$[-11.84, 21.90]$	19.71	$[2.82, 5.98]$	0.59
$[f]^*$	$[0.24, 14.27]$	0	$[3.21, 5.78]$	0

La détermination de la fonction d’inclusion minimale est basée sur la monotonie de la fonction f sur le pavé $\mathbf{x}$. En effet, si f est croissante sur les domaines $[x_1]$ et $[x_2]$, alors

$$[f]^*(\mathbf{x}) = [\underline{x}_1^2 + \underline{x}_1 \exp(\underline{x}_2) - \underline{x}_2^2, \bar{x}_1^2 + \bar{x}_1 \exp(\bar{x}_2) - \bar{x}_2^2].$$

Le tableau 1.1 présente l’évaluation de ces fonctions d’inclusion pour les intervalles de grandes tailles $\mathbf{x}$ comparés aux intervalles de plus petites tailles $\mathbf{y}$. Comme précisé auparavant, l’utilisation des fonctions d’inclusion centrées $[f]_c$ ou de Taylor $[f]_T$ donne des résultats moins pessimistes pour des intervalles de petites tailles. En revanche, il est toujours préférable d’utiliser la fonction d’inclusion naturelle $[f]_n$ pour les intervalles de grandes tailles. Ceci est mesuré par la différence $\Delta[f](\mathbf{x}) = w([f](\mathbf{x})) - w(f(\mathbf{x}))$ où $w([f](\mathbf{x}))$ est la largeur de l’intervalle qui représente la fonction d’inclusion de $\mathbf{x}$ ou de $\mathbf{y}$, $[f](\mathbf{x})$, et $w(f(\mathbf{x}))$ est la largeur de l’intervalle qui représente la fonction de l’intervalle $\mathbf{x}$ ou $\mathbf{y}$, $f(\mathbf{x})$.

1.2.3.5 Propriétés des fonctions d’inclusion

- Une fonction d’inclusion $\mathbf{f}$ est dite monotone si

$$[\mathbf{x}] \subset [\mathbf{y}] \implies [\mathbf{f}](\mathbf{x}) \subset [\mathbf{f}](\mathbf{y}); \quad (1.2.25)$$

$\forall [\mathbf{f}](\mathbf{x}), [\mathbf{f}](\mathbf{y})$ des fonctions d’inclusion minimales de $\mathbf{x}, \mathbf{y}$;

$\mathbf{f}$ est convergente si :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w([\mathbf{x}](k)) = 0 \implies \lim_{k \rightarrow \infty} w(\mathbf{f}([\mathbf{x}](k)) = 0; \quad (1.2.26)$$

et son ordre de convergence est le plus grand ordre entier α tel que [?] :

$$\exists \beta > 0 | w([\mathbf{f}](\mathbf{x})) - w(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \leq \beta w([\mathbf{x}])^\alpha. \quad (1.2.27)$$

1.3 Arithmétique des intervalles complexes

Trois représentations des intervalles complexes sont principalement décrites dans la littérature : la représentation rectangulaire [?], [?], [?], la représentation polaire [?], [?], [?], [?] et la représentation circulaire [?], [?], [?], [?].

1.3.1 Représentation rectangulaire

Soient $[x_1]$ et $[x_2]$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, l'intervalle complexe rectangulaire est défini par :

$$[X] = \{x_1 + j x_2 \mid x_1 \in [x_1], x_2 \in [x_2]\} = [x_1] + j [x_2], \quad \text{avec } j^2 = -1. \quad (1.3.1)$$

L'ensemble des intervalles complexes rectangulaires est noté par $\mathbb{R}(\mathbb{C})$.

Cette représentation consiste à donner la forme d'un rectangle à l'intervalle complexe $[X]$ défini en (1.3.1). Par conséquent, les côtés de ce rectangle sont parallèles aux axes réel et imaginaire, comme le montre la figure 1.3 pour l'intervalle complexe $[X] = [2, 3] + j[1, 3]$.

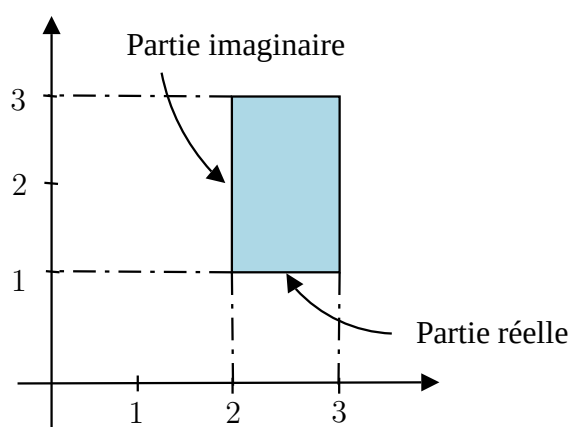


FIG. 1.3 – Représentation de l'intervalle complexe rectangulaire $[2, 3] + j[1, 3]$.

Propriété 1.3.1 Soient $[X], [Y] \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ tels que $[X] = [x_1] + j[x_2]$ et $[Y] = [y_1] + j[y_2]$, alors $[X]$ et $[Y]$ sont égaux si et seulement si $[x_1] = [y_1]$ et $[x_2] = [y_2]$.

Opérations arithmétiques

Soient $[X], [Y] \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ avec $[X] = [x_1] + j[x_2]$ et $[Y] = [y_1] + j[y_2]$. L'addition et la soustraction des intervalles complexes rectangulaires sont des opérations exactes, le résultat

est donc minimal. En revanche, la multiplication et la division des intervalles rectangulaires complexes ne sont pas des opérations exactes, le résultat ne forme pas un rectangle, il doit donc être aligné par un rectangle. Un pessimisme est alors systématiquement introduit. Les opérations élémentaires sont définies comme suit :

$$[X] + [Y] = [x_1] + [y_1] + j ([x_2] + [y_2]), \quad (1.3.2)$$

$$[X] - [Y] = [x_1] - [y_1] + j ([x_2] - [y_2]), \quad (1.3.3)$$

$$[X] \times [Y] = ([x_1][y_1] - [x_2][y_2]) + j ([x_1][y_2] + [x_2][y_1]), \quad (1.3.4)$$

$$[X]/[Y] = (([x_1][y_1] + [x_2][y_2]) + j ([x_2][y_1] - [x_1][y_2])) / ([y_1]^2 + [y_2]^2). \quad (1.3.5)$$

Remarque 1.3.1 La division de deux intervalles complexes n'est pas possible lorsque le dénominateur $[y_1]^2 + [y_2]^2$ contient 0.

L'opération de division présentée ci-dessus n'est pas précise et son utilisation conduit à des résultats pessimistes. Cependant, une autre méthode de calcul de l'opération de division moins pessimiste a été proposée par [?], [?] :

$$[X]/[Y] = [X] \frac{1}{[Y]}, \quad (1.3.6)$$

avec

$$\frac{1}{[Y]} = \inf \{ [A] \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) | \{1/a \mid a \in [Y]\} \in [A] \}. \quad (1.3.7)$$

Cette méthode consiste à trouver le plus petit intervalle complexe contenant $\frac{1}{[Y]}$ et à le multiplier ensuite par $[X]$. Néanmoins, l'inconvénient de cette méthode réside dans le temps de calcul. Une autre méthode plus efficace consiste à calculer le minimum et le maximum de la partie réelle et de la partie imaginaire de [?] :

$$\frac{[X]}{[Y]} = \frac{[x_1] + j [x_2]}{[y_1] + j [y_2]} = \frac{[x_1][y_1] + [x_2][y_2]}{[y_1]^2 + [y_2]^2} + j \frac{[x_2][y_1] - [x_1][y_2]}{[y_1]^2 + [y_2]^2}, \quad (1.3.8)$$

avec

$$(x_1 + j x_2) \in [X], \quad (y_1 + j y_2) \in [Y] \quad \text{et} \quad y_1^2 + y_2^2 > 0.$$

1.3.2 Représentation polaire

Soient $[\rho]$ et $[\theta]$ deux intervalles de $\mathbb{R}^+$ et de $\mathbb{R}$. L'intervalle complexe polaire est défini par :

$$[X] = \{ \rho \exp^{j\theta} \mid \rho = |x| \in [\rho], \theta = \arg(x) \in [\theta] \} = [\rho] \exp^{j[\theta]}, \quad \text{avec} \quad j^2 = -1. \quad (1.3.9)$$

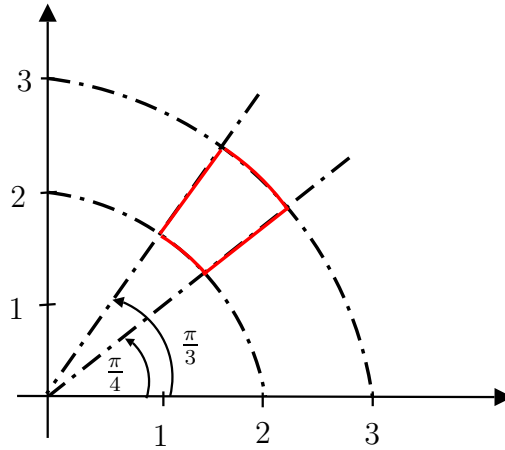


FIG. 1.4 – Représentation de l'intervalle complexe polaire $[x] = [2, 3]e^{j[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]}$.

L'ensemble des intervalles complexes polaires appelé aussi *secteurs* est noté par $\mathbb{S}(\mathbb{C})$. Les paramètres $[\rho]$ et $[\theta]$ représentent respectivement le module et l'argument du secteur, avec :

$$\begin{aligned} [\rho] &= [\underline{\rho}, \overline{\rho}], \quad \underline{\rho} \geq 0, \\ [\theta] &= [\underline{\theta}, \overline{\theta}], \quad (\text{de taille inférieure ou égale à } 2\pi) \end{aligned}$$

La condition sur les bornes de l'angle $[\theta]$ a pour objectif d'assurer l'unicité de la représentation, on peut choisir ces bornes de la manière suivante [?] :

$$0 \leq \overline{\theta} - \underline{\theta} \leq 2\pi, \quad 0 \leq \underline{\theta} < 2\pi, \quad 0 \leq \overline{\theta} < 4\pi. \quad (1.3.10)$$

Cette représentation consiste à donner la forme d'un secteur à l'intervalle complexe $[X]$ défini en (1.3.9), comme le montre la figure 1.4 pour l'intervalle complexe $[x] = [2, 3]e^{j[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]}$.

Propriété 1.3.2 Soient $[X]$ et $[Y] \in \mathbb{S}(\mathbb{C})$ tels que $[X] = [\rho_1]e^{j[\theta_1]}$ et $[Y] = [\rho_2]e^{j[\theta_2]}$, alors $[X]$ et $[Y]$ sont égaux si et seulement si $[\rho_1] = [\rho_2]$ et $[\theta_1] = [\theta_2]$.

Opérations arithmétiques

Soient $[X], [Y] \in \mathbb{S}(\mathbb{C})$ avec $[X] = [\rho_1] \exp^{j[\theta_1]}$ et $[Y] = [\rho_2] \exp^{j[\theta_2]}$. L'addition et la soustraction des intervalles complexes polaires ne sont pas des opérations exactes, le résultat ne forme pas un secteur, il doit donc être inclus dans un secteur. Un pessimisme est alors systématiquement introduit. En revanche, la multiplication et la division des intervalles complexes polaires sont des opérations exactes. Les opérations élémentaires sont définies comme suit :

$$[X] + [Y] = \{\rho_1 e^{j\theta_1} + \rho_2 e^{j\theta_2} \mid [\rho_1] \exp^{j[\theta_1]} \in [X], [\rho_2] \exp^{j[\theta_2]} \in [Y]\}. \quad (1.3.11)$$

Le résultat de $[X] + [Y]$ ne forme pas un secteur mais un ensemble de formes géométriques complexes. L'idée proposée par [?] et [?] est de calculer le plus petit secteur $\hat{X}$ contenant la somme $[X] + [Y]$

$$[X] + [Y] \subset \hat{X}, \quad \hat{X} \in \mathbb{S}(\mathbb{C}). \quad (1.3.12)$$

L'opération de soustraction est également définie de la même manière par :

$$[X] - [Y] = [X] + (-[Y]), \quad \text{avec} \quad (-[Y]) = \{y \mid -y \in [Y]\}. \quad (1.3.13)$$

Elle ne nécessite donc pas un traitement supplémentaire. Le lecteur peut se référer à [?] et [?] pour plus de détail sur la caractérisation de la somme $[X] + [Y]$ par un secteur.

L'opération de multiplication de $[X]$ et $[Y]$ est définie par :

$$\begin{aligned} [X] \times [Y] &= \{x \times y \mid x \in [X], y \in [Y]\}, \\ &= \{(\rho_1 \times \rho_2) \exp(j(\theta_1 + \theta_2)) \mid (\rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2) \in [\rho_1] \times [\rho_2] \times [\theta_1] \times [\theta_2]\}, \\ &= ([\rho_1] \times [\rho_2]) \exp^{j([\theta_1] + [\theta_2])} = [\rho] \exp^{j[\theta]}. \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

$$\begin{aligned} [X]/[Y] &= \{[\rho_1] \exp^{j[\theta_1]} / [\rho_2] \exp^{j[\theta_2]} \mid [\rho_1] \exp^{j[\theta_1]} \in [X], [\rho_2] \exp^{j[\theta_2]} \in [Y]\}, \\ &= \frac{[\rho_1]}{[\rho_2]} \exp^{j([\theta_1] - [\theta_2])} = [\rho] \exp^{j[\theta]}. \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

avec $0 \notin [\rho_2]$. Les bornes de l'argument résultant après une opération quelconque peuvent ne pas respecter les conditions exprimées dans (1.3.10). Il faut alors rajouter $(2k\pi)$, avec $k \in \mathbb{Z}$ de telle sorte à toujours satisfaire cette condition.

1.3.3 Représentation circulaire

Soient $c \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}$, avec $r \geq 0$. L'ensemble $[X]$ tel que :

$$[X] = \{x \in \mathbb{C} \mid |x - c| \leq r\}, \quad (1.3.16)$$

est un intervalle complexe circulaire, appelé aussi *disque*. L'ensemble des intervalles complexes sous forme de disque est noté par $\mathbb{K}(\mathbb{C})$. Ainsi, un disque est caractérisé par son centre c et par son rayon r , il est noté par $X = \{c; r\}$. La figure 1.5 montre le disque $[X] = \{2 + 2j; 1\}$.

Propriété 1.3.3 Soient $[X_1]$ et $[X_2] \in \mathbb{K}(\mathbb{C})$ tels que $[X_1] = \{c_1; r_1\}$ et $[X_2] = \{c_2; r_2\}$, alors $[X_1]$ et $[X_2]$ sont égaux si et seulement si $c_1 = c_2$ et $r_1 = r_2$.

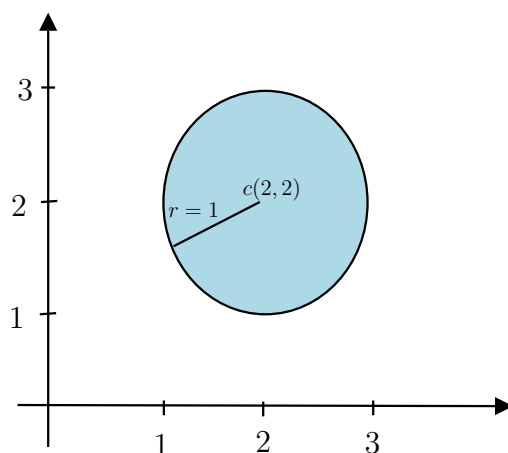


FIG. 1.5 – Représentation de l'intervalle complexe circulaire $\{2 + 2j; 1\}$.

Opérations arithmétiques

Les opérations arithmétiques sur $\mathbb{K}(\mathbb{C})$, sont issues de la généralisation des opérations sur les nombres complexes [?].

Soient $[X]$ et $[Y] \in \mathbb{K}(\mathbb{C})$ avec $[X] = \{c_1; r_1\}$ et $[Y] = \{c_2; r_2\}$. L'addition et la soustraction des intervalles complexes circulaires sont des opérations exactes, le résultat est donc minimal. En revanche, la multiplication et la division des intervalles complexes circulaires ne sont pas des opérations exactes, le résultat ne forme pas un disque, il doit donc être inclus dans un disque. Un pessimisme est alors systématiquement introduit. Les opérations élémentaires sont définies comme suit :

$$[X] + [Y] = \{c_1 + c_2; r_1 + r_2\}, \quad (1.3.17)$$

$$[X] - [Y] = \{c_1 - c_2; r_1 + r_2\}. \quad (1.3.18)$$

La multiplication est définie comme suit :

$$[X] \times [Y] = \{c_1 c_2; |c_1| r_2 + |c_2| r_1 + r_1 r_2\}. \quad (1.3.19)$$

Dans [?], l'inclusion suivante a été démontrée

$$\{xy \mid x \in [X], y \in [Y]\} \subseteq [X] \times [Y]. \quad (1.3.20)$$

Ceci implique que l'évaluation de la multiplication est souvent pessimiste. Une autre définition de la multiplication a été proposée dans [?]. A travers cette définition, on obtient le plus petit

disque contenant l'ensemble $\{xy|x \in [X], y \in [Y]\}$. Le diamètre de ce disque est égal au diamètre de l'ensemble $\{xy|x \in [X], y \in [Y]\}$.

Cette méthode permet de réduire le pessimisme lors de l'évaluation de la multiplication de deux disques. Néanmoins, la complexité de calcul de cette méthode est importante, et la propriété de distributivité au sens de l'inclusion n'est pas vraie :

$[X] \subseteq [T_1], [Y] \subseteq [T_2]$ n'implique pas que $[X] \times [Y] \subseteq [T_1] \times [T_2]$.

L'opération d'inversion du disque $[Y]$ est définie par :

$$\frac{1}{[Y]} = \left\{ \frac{\bar{c}_2}{|c_2|^2 - r_2^2}, \frac{r_2}{|c_2|^2 - r_2^2} \right\}, \quad \text{lorsque } 0 \notin [Y], \quad (1.3.21)$$

$\bar{c}_2$ et $|c_2|$ représentant respectivement le conjugué et le module de c_2 . Cette opération n'est pas définie pour $0 \in [Y]$.

En se basant sur la définition de l'opération de l'inversion de disque, ainsi que sur la multiplication, la division de $[X]$ par $[Y]$ est donnée par :

$$\frac{[X]}{[Y]} = [X] \frac{1}{[Y]}, \quad 0 \notin [Y]. \quad (1.3.22)$$

L'opération de division est elle aussi non exacte, à cause de la multiplication nécessaire pour évaluer la division.

1.4 Inversion ensembliste par arithmétique des intervalles

1.4.1 Problème de satisfaction de contraintes

On considère n_x variables, $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n_x\}$, liées par n_f contraintes de la forme :

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_{n_x}) = 0, \quad j \in \{1, \dots, n_f\}. \quad (1.4.1)$$

Soit le pavé $[\mathbf{x}] = [x_1] \times \dots \times [x_{n_x}]$ correspondant aux domaines d'incertitudes des x_i connus *a priori*. On définit f l'ensemble des fonctions f_j de sorte que l'expression (1.4.1) peut être réécrite sous la forme $f(\mathbf{x}) = 0$. La résolution de cette équation pour $\mathbf{x} \in [\mathbf{x}]$ est un problème de satisfaction de contrainte (CSP : *Constraint Satisfaction Problem*) [?], que l'on peut écrire sous la forme :

$$\mathcal{H} : (f(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in [\mathbf{x}]). \quad (1.4.2)$$

L'ensemble des solutions de $\mathcal{H}$ est :

$$\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{X} \mid f(x) \in [y]\}. \quad (1.4.3)$$

Cet ensemble peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\mathbb{S} = f^{-1}([y]) \cap \mathbb{X}. \quad (1.4.4)$$

En notant $\mathbb{S}_j$ l'ensemble des solutions de la contrainte $f_j(x_1, x_2, \dots, x_{n_x}) = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n_f\}$, la solution générale du CSP est l'intersection des $\mathbb{S}_j$:

$$\mathbb{S} = \bigcap_{j=1}^n \mathbb{S}_j. \quad (1.4.5)$$

L'inversion ensembliste consiste à déterminer le plus petit pavé $[\mathbf{x}]^*$ contenant les solutions du CSP (1.4.2). Pour y parvenir, une solution consiste à utiliser des contracteurs. Contracter $\mathcal{H}$ revient à trouver un pavé $[\mathbf{x}]^*$ satisfaisant $\mathcal{H}$ tel que :

$$\mathbb{S} \subset [\mathbf{x}]^* \subset [\mathbf{x}]. \quad (1.4.6)$$

1.4.2 Inversion ensembliste par contraction

Le problème d'inversion ensembliste se résout par contraction, bisection ou par la combinaison des deux.

1.4.2.1 Contracteurs

Les outils développés dans le cadre de la caractérisation d'ensemble par contraction sont basés sur des techniques de consistance (voir par exemple [?], [?], [?]). En effet, dans la mesure où l'ensemble est caractérisé par une contrainte, l'idée est de supprimer les parties qui sont inconsistantes avec cette contrainte et par conséquent qui ne représente pas l'ensemble recherché. L'objectif principal de réduire les domaines intervalles est de diminuer le temps effectif de résolution de problèmes basés sur l'arithmétique des intervalles.

Exemple 1.4.1 Soit la contrainte

$$x_3 = \frac{1}{2}x_1x_2, \quad (1.4.7)$$

où $(x_1, x_2, x_3) \in ([2, 4], [1, 2], [1, 10])$

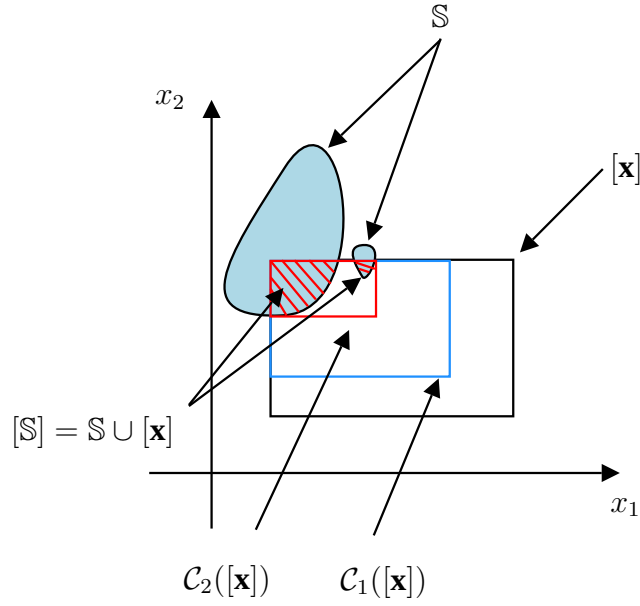


FIG. 1.6 – Illustration d'une contraction sur $[\mathbf{x}]$ obtenue avec le contracteur $\mathcal{C}$.

$x_3 = 5$ est une valeur inconsistante avec (1.4.1). En effet :

$$\forall (x_1, x_2) \in [2, 4] \times [1, 2], \frac{1}{2}x_1x_2 \neq x_3 = 5.$$

De même, le domaine $[5, 10]$ n'est pas consistant par rapport à la contrainte (1.4.1), car :

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in [2, 4] \times [1, 2] \times [5, 10], \frac{1}{2}x_1x_2 \neq x_3.$$

La figure 1.6 illustre le principe de la réduction d'un domaine initial $[\mathbf{x}]$ par un contracteur $\mathcal{C}$, $[\mathbb{S}]$ est le plus petit pavé contenant $\mathbb{S}$, il correspond à la réduction minimale de pavé $[\mathbf{x}]$.

Un opérateur $\mathcal{C}$ est un contracteur pour $\mathcal{H}$ si pour tout pavé $[\mathbf{x}]^*$ inclus dans $[\mathbf{x}]$ il vérifie les propriétés suivantes :

- la contractance : $\forall [\mathbf{x}]^* \subset [\mathbf{x}], \quad \mathcal{C}([\mathbf{x}]^*) \subset [\mathbf{x}]$,
- monotonie : $\forall [\mathbf{y}] \subset [\mathbf{x}], \forall [\mathbf{z}] \subset [\mathbf{x}], [\mathbf{y}] \subseteq [\mathbf{z}] \Rightarrow \mathcal{C}([\mathbf{y}]) \subseteq \mathcal{C}([\mathbf{z}])$,
- consistance : $(\mathbf{x} \in [\mathbf{x}], \mathcal{C}(\{\mathbf{x}\}) = \{\mathbf{x}\}) \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathbf{x})$
- complétude : $\forall [\mathbf{x}]^* \subset [\mathbf{x}], \Rightarrow (\mathcal{C}([\mathbf{x}]^*) \cap \mathbb{S}) \subset ([\mathbf{x}]^* \cap \mathbb{S})$,

où $\mathbb{S}$ est l'ensemble des solutions de $\mathcal{H}$.

De plus, un contracteur *idempotent* est un contracteur qui vérifie

$$\forall [\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^n, \mathcal{C}(\mathcal{C}(\mathbf{x})) = \mathcal{C}(\mathbf{x}).$$

Un contracteur minimal est un contracteur dont le pavé issu de la contraction est le plus petit pavé contenant l'ensemble de solution $\mathbb{S}$.

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}) = [[\mathbf{x}] \cap \mathbb{S}]. \quad (1.4.8)$$

De même, on dit qu'un pavé est *insensible* au contracteur $\mathcal{C}$, si $\mathcal{C}([\mathbf{x}]) = [\mathbf{x}]$.

L'ensemble associé à un contracteur $\mathcal{C}$, noté $\text{set}(\mathcal{C})$, est l'ensemble formé par l'union des singletons insensibles à $\mathcal{C}$, c'est-à-dire,

$$\text{set}(\mathcal{C}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathcal{C}(\{\mathbf{x}\}) = \{\mathbf{x}\}\}. \quad (1.4.9)$$

Une collection de contracteurs $\{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m\}$ est dite complémentaire si

$$\text{set}(\mathcal{C}_1) \cap \dots \cap \text{set}(\mathcal{C}_m) = \emptyset. \quad (1.4.10)$$

Un contracteur peut être vu comme un moyen de représenter un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$. Il correspond à un algorithme implémentable en machine et contient toute l'information sur l'ensemble qu'il représente [?]. Contrairement à ce même ensemble, il est très facile à manipuler et toutes les opérations élémentaires sur les ensembles peuvent être étendues aux contracteurs.

Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ deux contracteurs, on définit les opérations suivantes :

- intersection : $(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)([\mathbf{x}]) = \mathcal{C}_1([\mathbf{x}]) \cap \mathcal{C}_2([\mathbf{x}])$;
- union : $(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2)([\mathbf{x}]) = \mathcal{C}_1([\mathbf{x}]) \cup \mathcal{C}_2([\mathbf{x}])$;
- composition : $(\mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_2)([\mathbf{x}]) = \mathcal{C}_1(\mathcal{C}_2([\mathbf{x}]))$;
- répétition : $\mathcal{C}_1^\infty = \mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_1 \circ \dots$;
- intersection répétée : $(\mathcal{C}_1 \sqcap \mathcal{C}_2) = (\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)^\infty$;
- union répétée : $(\mathcal{C}_1 \sqcup \mathcal{C}_2) = (\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2)^\infty$.

Les opérateurs définis ci-dessus satisfont les propriétés de contractance, consistance et de convergence. Il forme donc effectivement des contracteurs. La composition n'est pas commutative (i.e $\mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_2 \neq \mathcal{C}_2 \circ \mathcal{C}_1$), contrairement à toutes les autres opérations $\cap, \cup, \sqcap, \sqcup$.

Définition 1.4.1 Soit $\epsilon > 0$, on définit un contracteur de précision comme suit :

$$\mathcal{C}_\epsilon([\mathbf{x}]) = \begin{cases} [\mathbf{x}] & \text{si } w([\mathbf{x}]) > \epsilon \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.4.11)$$

Il existe plusieurs méthodes de contraction, elles sont majoritairement issues de l'analyse numérique. Elles sont divisées en deux classes en fonction du problème à résoudre. Si le problème peut s'écrire sous une forme linéaire, alors des méthodes linéaires s'appliquent dont la méthode

d'élimination de Gauss et la méthode de Gauss-Seidel. Dans le cas non linéaire, il existe aussi des méthodes de contraction comme celle de Krawczyk, Newton, [?], [?], [?] ou par décomposition en contraintes primitives [?], [?]. Le principe de cette dernière est présenté dans la suite.

1.4.2.2 Contracteur de propagation/rétropropagation

Ce contracteur, appelé *Propagation-Rétropropagation* et noté $\mathcal{C}_{\downarrow\uparrow}$, est basé sur le principe de propagation de contraintes [?], [?], [?]. Le principe, est de décomposer la contrainte (ou les contraintes) du CSP en un ensemble de contraintes élémentaires. Une contrainte élémentaire ne contient qu'une opération arithmétique telle que $\{+, -, \times, /\}$ entre deux variables ou une fonction élémentaire comme $\{\exp, \log \dots\}$ appliquée sur une seule variable. Un ensemble de variables intermédiaires est alors introduit.

Exemple 1.4.2 Pour réduire le pavé $[x] = [x_1], [x_2], [x_3]$ avec $[x_1] = [1, 20]$, $[x_2] = [-10, 10]$ et $[x_3] = [2, 8]$ sous la contrainte $[x_1] - \cos([x_2]) + [x_3]^2 \in [4, 6]$. La décomposition en contraintes primitives est donnée par :

$$\begin{aligned} [a_1] &= \cos([x_2]), \\ [a_2] &= [x_1] - [a_1], \\ [a_3] &= [x_3]^2, \\ [a_4] &= [a_2] + [a_3]. \end{aligned}$$

Les domaines initiaux des variables intermédiaires a_1, a_2, a_3 et a_4 sont $] -\infty, \infty[$. La phase de propagation se fait de la façon suivante :

$$\begin{aligned} [a_1] &\leftarrow \cos([x_2]) \cap [a_1] = [-1, 1], \\ [a_2] &\leftarrow ([x_1] - [a_1]) \cap [a_2] = [0, 21], \\ [a_3] &\leftarrow [x_3]^2 \cap [a_3] = [4, 64], \\ [a_4] &\leftarrow ([a_2] + [a_3]) \cap [a_4] = [4, 85]. \end{aligned}$$

La phase de rétropropagation consiste à réduire les domaines des variables $[x_i]$, en utilisant les

informations sur y . Ce processus s'effectue comme suit :

$$\begin{aligned}
 [a_4] &\leftarrow [4, 6] \cap [a_4] = [4, 6], \\
 [a_3] &\leftarrow ([a_4] - [a_2]) \cap [a_3] = [4, 6], \\
 [a_2] &\leftarrow ([a_4] - [a_3]) \cap [a_2] = [0, 2], \\
 [a_1] &\leftarrow ([x_1] - [a_2]) \cap [a_1] = [-1, 1], \\
 [x_1] &\leftarrow ([a_2] + [a_1]) \cap [x_1] = [1, 3], \\
 [x_2] &\leftarrow (\arccos([a_1])) \cap [x_2] = [0, 3.14], \\
 [x_3] &\leftarrow (\sqrt{a_3}) \cap [x_3] = [2, 2.44].
 \end{aligned}$$

Le pavé réduit est donc $[\mathbf{x}] = [[1, 3] , [0, 3.14] , [2, 2.44]]$.

1.4.3 Inversion ensembliste par bisection

La caractérisation de l'ensemble $\mathbb{S}$ défini par (1.4.4) est un problème d'inversion ensembliste qui, pour le cas non linéaire, peut être résolu d'une manière garantie en utilisant l'algorithme SIVIA (Set Inversion Via Interval Analysis) proposé par *Jaulin* et *Walter* [?]. Cet algorithme permet de trouver un encadrement (lorsqu'au moins une solution existe) de l'ensemble des solutions. Les ensembles $\underline{\mathbb{S}}$ et $\overline{\mathbb{S}}$ représentent respectivement, un encadrement intérieur et un encadrement extérieur de l'ensemble solution $\mathbb{S}$:

$$\underline{\mathbb{S}} \subseteq \mathbb{S} \subseteq \overline{\mathbb{S}}, \quad (1.4.12)$$

avec :

$$\overline{\mathbb{S}} = \underline{\mathbb{S}} \cup \Delta\mathbb{S}, \quad (1.4.13)$$

où $\underline{\mathbb{S}}$ est l'ensemble des pavés prouvés solutions et $\Delta\mathbb{S}$ est l'ensemble des pavés pour lesquels aucune décision n'a pu être établie et peut être interprété aussi en terme d'incertitudes sur la caractérisation de $\mathbb{S}$. La relation suivante est alors valable :

$$\text{vol}(\underline{\mathbb{S}}) \subseteq \text{vol}(\mathbb{S}) \subseteq \text{vol}(\overline{\mathbb{S}}), \quad (1.4.14)$$

où $\text{vol}(\mathbb{S})$ est le volume de l'ensemble $\mathbb{S}$. De plus,

- si $\overline{\mathbb{S}} = \emptyset$ (ensemble vide) le problème (1.4.4) ne possède aucune solution,
- si $\underline{\mathbb{S}} \neq \emptyset$ l'ensemble $\mathbb{S}$ n'est pas vide , il existe au moins une solution vérifiant (1.4.4).

Algorithm SIVIA

L'algorithme de partitionnement SIVIA permet une caractérisation garantie de ces ensembles de pavés en utilisant un test d'inclusion défini par :

$$t([x]) = \begin{cases} 1 & \text{si } [f]([x]) \subseteq [y], \\ 0 & \text{si } [f]([x]) \cap [y] = \emptyset, \\ \text{indéterminé} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.4.15)$$

Un pavé $[x] \in \mathbb{X}$ est dit :

- faisable et $[x] \in \underline{\mathbb{S}}, [x] \in \overline{\mathbb{S}}, \text{ si } t([x]) = 1$,
- non faisable, si $t([x]) = 0$,
- indéterminé, si $t([x])$ est indéterminé.

Dans ce dernier cas, aucune décision à propos du pavé $[x]$ n'est possible. Si sa taille est supérieure à une certaine tolérance η fixée par l'utilisateur, il est partitionné en deux sous-pavés et l'algorithme est réexécuté sur chacun d'eux. L'algorithme SIVIA est le suivant :

Algorithme SIVIA (entrées : $[t], [\mathbf{x}], \eta$; sortie : $\underline{\mathbb{S}}, \overline{\mathbb{S}}$)

1. Si $[t]([\mathbf{x}]) = 0$, alors rejeter $[\mathbf{x}]$, retour,
2. Si $[t]([\mathbf{x}]) = [1]$, alors $\underline{\mathbb{S}} := \underline{\mathbb{S}} \cup [\mathbf{x}]; \overline{\mathbb{S}} := \overline{\mathbb{S}} \cup [\mathbf{x}]$, retour,
3. Si $w([\mathbf{x}]) \leq \eta$, alors $\overline{\mathbb{S}} := \overline{\mathbb{S}} \cup [\mathbf{x}]$, retour,
Sinon bissecter $[\mathbf{x}]$ en $([\mathbf{x}_1], [\mathbf{x}_2])$,
4. SIVIA (entrées : $[t], [\mathbf{x}_1], \eta$; sortie : $\underline{\mathbb{S}}, \overline{\mathbb{S}}$),
5. SIVIA (entrées : $[t], [\mathbf{x}_2], \eta$; sortie : $\underline{\mathbb{S}}, \overline{\mathbb{S}}$).

L'ensemble de pavés $\Delta\mathbb{S} = \overline{\mathbb{S}}/\underline{\mathbb{S}}$ représente l'incertitude sur la caractérisation de l'ensemble solution $\mathbb{S}$, il contient les pavés de tailles plus petites que η .

Exemple 1.4.3 [?] Soit $\mathbb{X}$ l'ensemble des vecteurs $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ de $\mathbb{R}^2$, qui satisfait

$$\begin{cases} \exp(x_1) + \exp(x_2) & \in [10, 11], \\ \exp(2x_1) + \exp(2x_2) & \in [62, 72]. \end{cases} \quad (1.4.16)$$

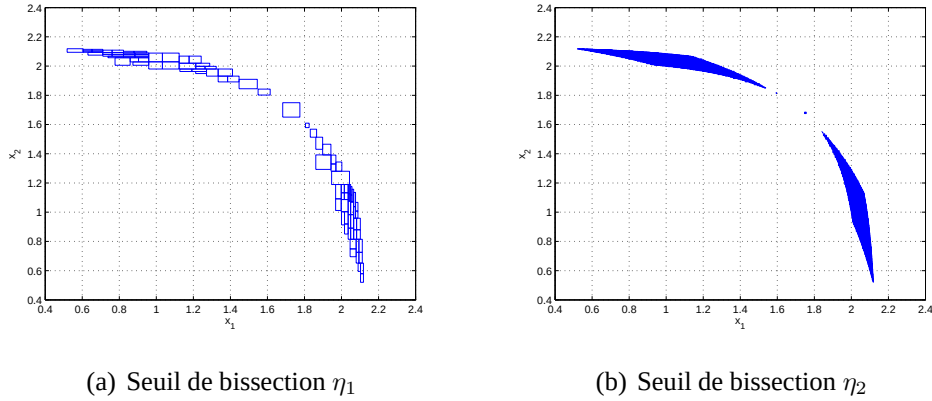


FIG. 1.7 – Ensemble de pavés générés par SIVIA

La caractérisation de l'ensemble $\mathbb{X}$ est un problème d'inversion ensembliste qui peut être résolu par l'algorithme SIVIA. La figure 1.7 montre l'approximation extérieure $\overline{\mathbb{X}}$ de cet ensemble avec deux précisions différentes. η_1 et $\eta_2 < \eta_1$. Il est évident que la précision de $\overline{\mathbb{X}}$ est inversement proportionnelle au seuil de la bisection η .

Lorsque la dimension du vecteur $[\mathbf{x}]$ est importante, il devient difficile de réaliser une bonne approximation. Dans le cas de l'algorithme SIVIA, la complexité est exponentielle par rapport à la dimension du vecteur $[\mathbf{x}]$. Le nombre N de bisections effectuées est inférieur à [?] :

$$N = \left(\frac{w(\mathbb{X}_0)}{\eta} + 1 \right)^{n_x}, \quad (1.4.17)$$

où $\mathbb{X}_0$ est le pavé initial de recherche, n_x la dimension du vecteur $[\mathbf{x}]$ et η la précision de bisection.

1.4.4 SIVIA avec contracteur

Il est important de coupler l'algorithme SIVIA avec un contracteur afin de réduire la complexité algorithmique et de réduire le nombre de bisections nécessaires pour résoudre un problème d'inversion ensembliste. Cette étape est primordiale pour réduire le temps de calcul des encadrements intérieurs $\underline{\mathbb{S}}$ et extérieurs $\overline{\mathbb{S}}$ de l'ensemble de solution $\mathbb{S}$. L'algorithme SIVIA est alors modifié en incluant la contraction à l'étape 1

Algorithme SIVIA-Contracteur (entrées : $[t], [\mathbf{x}], \eta$; sortie : $\underline{\mathbb{S}}, \overline{\mathbb{S}}$)

1. $[\mathbf{x}] \leftarrow \mathcal{C}([\mathbf{x}])$
2. Si $[t]([\mathbf{x}]) = 0$, alors rejeter $[\mathbf{x}]$, retour,

3. Si $[t]([\mathbf{x}]) = [1]$, alors $\underline{\mathbb{S}} := \underline{\mathbb{S}} \cup [\mathbf{x}]$; $\overline{\mathbb{S}} := \overline{\mathbb{S}} \cup [\mathbf{x}]$, retour,
4. Si $w([\mathbf{x}]) \leq \eta$, alors $\overline{\mathbb{S}} := \overline{\mathbb{S}} \cup [\mathbf{x}]$, retour,
Sinon bissecter $[\mathbf{x}]$ en $([\mathbf{x}_1], [\mathbf{x}_2])$,
5. SIVIA-Contracteur (entrées : $[t], [\mathbf{x}_1], \eta$; sortie : $\underline{\mathbb{S}}, \overline{\mathbb{S}}$),
6. SIVIA-Contracteur (entrées : $[t], [\mathbf{x}_2], \eta$; sortie : $\underline{\mathbb{S}}, \overline{\mathbb{S}}$).

1.5 Solvers et boîtes à outils

Il existe plusieurs outils dédiés à l'arithmétique des intervalles réels et complexes, dont les principales boîtes à outils utilisées durant cette thèse sont détaillées ci-dessous.

1.5.1 C-XSC

C'est une boîte à outils développée en langage C++, qui permet la manipulation des intervalles réels et complexes sous la forme rectangulaire [?].

1.5.2 INTLAB

C'est une boîte à outils du logiciel MATLAB, qui permet de manipuler des intervalles réels et complexes sous la forme circulaire [?], [?].

1.5.3 QUIMPER

Contrairement aux boîtes à outils précédentes, QUIMPER est un langage qui permet de mettre en place et manipuler aisément des contracteurs afin de les utiliser pour résoudre des problèmes ensemblistes [?], [?], [?]. Lorsqu'un script est exécuté sous QUIMPER, une collection de contracteurs est d'abord construite, puis un paveur est lancé. Un paveur est un algorithme de bisection qui fait appel à tous les contracteurs disponibles sur tous les pavés courants. Seuls sont bissectés les pavés qui n'arrivent plus à être contractés par aucun des contracteurs et qui gardent une largeur supérieure à une précision donnée. Le paveur balaye donc tout l'espace de recherche $\mathbb{R}^n$ et range les zones contractés dans des ensembles appelés *sous-pavages*. Ainsi, à chaque contracteur correspond un unique sous-pavage. A la fin d'exécution du script, les résultats de chaque contracteur sont disponibles.

Il existe d'autres boîtes à outils développées en C et en C++, qui traitent de l'arithmétique des intervalles réels et complexes, telles que VENODE [?], PROFIL/BIAS [?] et COSTLY [?].

1.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation des concepts essentiels pour la suite de cette thèse. Dans un premier temps, les définitions des intervalles réels et complexes ont été rappelées, ainsi que les opérations de base sur ces intervalles. Des concepts nécessaires relatifs aux arithmétiques des intervalles ont également été introduits tels que les fonctions d'inclusion et leurs différents types, ainsi que l'efficacité de chacune d'elle qui dépend de la taille des intervalles. La manipulation des fonctions d'inclusion revient à aligner un ensemble de formes géométriques complexes par un pavé, un pessimisme est alors naturellement introduit dû à l'effet d'enveloppement. Pour réduire ce pessimisme, des opérateurs de contraction ont été développés qui permettent en l'occurrence d'éliminer tous les points ou pavés qui ne sont pas consistants avec cette forme géométrique qui représente l'ensemble de solutions. Ces opérateurs appelés *Contracteurs* ont été détaillés au paragraphe 1.4 *inversion ensembliste par contraction*, où seule la contraction permet de caractériser d'une manière garantie un ensemble de solutions connexe. Dans le cas où l'ensemble de solution est non connexe, *l'inversion ensembliste par bisection* présentée par l'algorithme SIVIA est alors utilisée pour caractériser l'ensemble de solutions. Dans le chapitre suivant, nous allons introduire le concept de la dérivation non entière et la représentation des systèmes par des modèles d'ordre non entier.

Chapitre 2

Opérateurs et systèmes à dérivées réelles et par intervalles

Sommaire

2.1	Introduction	33
2.2	Intégration et dérivation réelles	34
2.2.1	Intégration réelle	34
2.2.2	Dérivation réelle	35
2.3	Intégration et dérivation par intervalle	38
2.3.1	Définition de l'intégrale par intervalle réel	38
2.3.2	Définition de la dérivée par intervalle réel	43
2.3.3	Étude de la monotonie de la réponse temporelle d'un système par rapport à l'ordre de dérivation par intervalle	46
2.4	Représentation des systèmes non entiers	50
2.4.1	Équation différentielle	50
2.4.2	Pseudo-représentation d'état des systèmes non entiers	52
2.4.3	Fonction de transfert	52
2.5	Stabilité des systèmes non entiers	54
2.6	Fonctions de transfert élémentaires	56
2.6.1	Fonction de transfert élémentaire de première espèce	57
2.6.2	Fonction de transfert élémentaire de deuxième espèce	59
2.6.3	Extension de fonction de transfert élémentaire de première espèce à des ordres de dérivation sous forme d'intervalle	75
2.6.4	Extension de fonction de transfert élémentaire de deuxième espèce à des ordres de dérivation sous forme d'intervalle	76

2.7 Conclusion	77
-----------------------	-----------

2.1 Introduction

Le concept de la dérivation non entière date de 1695 quand *L'Hospital*, *Leibniz* et *Bernoulli* ont échangé sur la signification des *différentielles qui ont pour exposant des nombres rompus*¹. Au 18e siècle il y a eu peu de contributions sur ce sujet, néanmoins *Euler* a soulevé le problème de la définition d'une dérivée d'ordre fractionnaire. Suite à de nombreuses réflexions de *Cauchy*, *Lagrange*, *Fourier*, *Abel*, *Liouville*, *Riemann*, *Hardy*, . . . , la dérivation et l'intégration non entière ont été analytiquement définies. Des avancées majeures dans la dérivation non entière ont été réalisées durant la deuxième moitié du 20e siècle [?], [?], [?], [?], [?], [?], [?]. Aujourd'hui l'intérêt de la dérivation non entière ne cesse de grandir notamment dans le domaine de l'ingénierie et de l'Automatique à travers les ouvrages [?], [?], [?], [?], [?], [?], [?]. En effet, l'utilisation de l'opérateur de la dérivation non entière est à ce jour largement répandue dans des domaines aussi variés que l'automatique, la mécanique, l'électrochimie, la thermique, . . . etc.

En Automatique, la commande robuste d'ordre non entier (CRONE) a été développée depuis les années 90, [?]. D'autres études plus récentes dans le domaine de la commande, montrent la robustesse des régulateurs PID fractionnaires par rapport aux régulateurs PID classiques [?], [?]. En mécanique, la suspension CRONE a été élaborée sur la base de la dérivation non entière et ses performances en terme d'isolation vibratoire ont été prouvées [?], [?]. En électrochimie, les phénomènes de diffusion électrochimique sont aussi modélisés par la dérivation non entière où la diffusion des charges dans les batteries en acide est régie par des modèles de *Randles* [?], [?] utilisant un ordre d'intégration de 0.5. Les systèmes biologiques sont difficiles à modéliser et l'utilisation de la dérivation classique conduit souvent à des modèles d'ordre élevé. Cependant, l'utilisation de la dérivation non entière permet d'avoir des modèles compacts et faciles à manipuler [?]. En diffusion thermique, plusieurs études ont montré que le modèle liant la densité de flux de chaleur à travers un barreau métallique à la température mesurée est non entier, car il découle de la résolution de l'équation de la chaleur (équation aux dérivées partielles) [?], [?], [?], [?], [?]. Récemment dans [?], une identification d'un procédé thermique est élaborée et les principes de la platitude des systèmes linéaires non entiers sont appliqués pour poursuivre des trajectoires de référence prédéfinies.

Ce chapitre présente les principaux outils pour la modélisation de systèmes à dérivées non entières réelles, puis par intervalles. Ainsi le paragraphe 2.2 rappelle les définitions, devenues usuelles, de l'intégration et de la dérivation non entière. *L'extension de ces définitions à des intervalles, qui constitue une première originalité de cette thèse, est décrite au paragraphe*

¹extrait de la lettre datée du 10 Janvier 1695 de *Bernoulli* adressée au marquis de *L'Hospital*

2.3. La transformée de *Laplace* de ces opérateurs temporels y est calculée et leur monotonie par rapport à l'ordre de dérivation étudiée. Le paragraphe 2.4 rappelle les différents modes de représentation des systèmes non entiers. Ensuite, le paragraphe 2.5 présente la stabilité des systèmes non entiers. *Le paragraphe 2.6 présente une autre contribution de cette thèse, à savoir l'étude de la stabilité et de la résonance de fonctions de transfert élémentaires de première et de deuxième espèce*, la connaissance des comportements fréquentiels des fonctions de transfert élémentaires étant indispensable pour la modélisation de systèmes non entiers à partir de données fréquentielles. Une généralisation des fonctions de transfert élémentaires à des ordres de dérivation par intervalles y est également abordée.

2.2 Intégration et dérivation réelles

2.2.1 Intégration réelle

Une première définition de l'intégration réelle peut être introduite à partir de la formule de *Cauchy*. Soit f une fonction réelle de la variable t continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$. A partir des définitions respectives des intégrales d'ordre 1, 2 et 3 :

$$\mathbf{I}f(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau, \quad (2.2.1)$$

$$\mathbf{I}^2 f(t) = \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{-1}} d\tau, \quad (2.2.2)$$

$$\mathbf{I}^3 f(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{-2}} d\tau, \quad (2.2.3)$$

découle la formule de *Cauchy* de l'intégrale d'ordre entier n :

$$\mathbf{I}^n f(t) = \int_0^t \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{n-1}} f(\tau_{n-2}) d\tau_{n-2} \dots d\tau_1 \quad (2.2.4)$$

L'expression de l'intégrale d'ordre réel $\nu \in \mathbb{R}_+^*$ d'une fonction f a été définie la première fois par *Riemann* et *Liouville* en généralisant la formule de *Cauchy* à des ordres réels positifs :

$$\mathbf{I}^\nu f(t) \triangleq \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\nu}} d\tau, \quad \forall \nu \in \mathbb{R}_+^*. \quad (2.2.5)$$

Cette intégrale peut être réécrite sous la forme d'un produit de convolution (*) de la fonction $f(t)$ et du noyau $\frac{1}{\Gamma(\nu)t^{1-\nu}}$ [?] :

$$\mathbf{I}^\nu f(t) \triangleq \frac{1}{\Gamma(\nu)t^{1-\nu}} * f(t), \quad (2.2.6)$$

où Γ est la fonction d'*Euler* telle que :

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\nu-1} dx, \forall \nu \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{Z}_-. \quad (2.2.7)$$

Initialement définie pour des nombres réels positifs, la fonction *Gamma* est généralisée, par continuité analytique, aux nombres réels négatifs, excepté les entiers négatifs où elle possède des singularités.

L'intégrale d'ordre réel (2.2.6) est souvent appelée l'intégrale de *Riemann-Liouville*. En effet, *Liouville* a proposé la même définition que *Riemann* en remplaçant la borne inférieure d'intégration 0, par $-\infty$. Cependant, cette borne est souvent ramenée à zéro, étant donné que tous les systèmes rencontrés dans le domaine de la physique sont causaux et possèdent donc des réponses impulsionnelles nulles pour $t < 0$.

Transformée de *Laplace* de l'intégrale d'une fonction

La transformée de *Laplace* de l'intégrale d'ordre ν d'une fonction f réelle est donnée par [?] :

$$\mathcal{L}(\mathbf{I}^\nu f(t)) = \frac{1}{s^\nu} \mathcal{L}(f(t)), \quad (2.2.8)$$

où s désigne la variable de *Laplace*. Cette formule est la généralisation de la transformée de *Laplace* d'une intégrale entière.

Les caractéristiques fréquentielles de l'opérateur $\frac{1}{s^\nu}$ sont obtenues en remplaçant la variable de *Laplace* s par $j\omega$. Ainsi, le module et l'argument de l'opérateur d'intégration d'ordre ν sont donnés par :

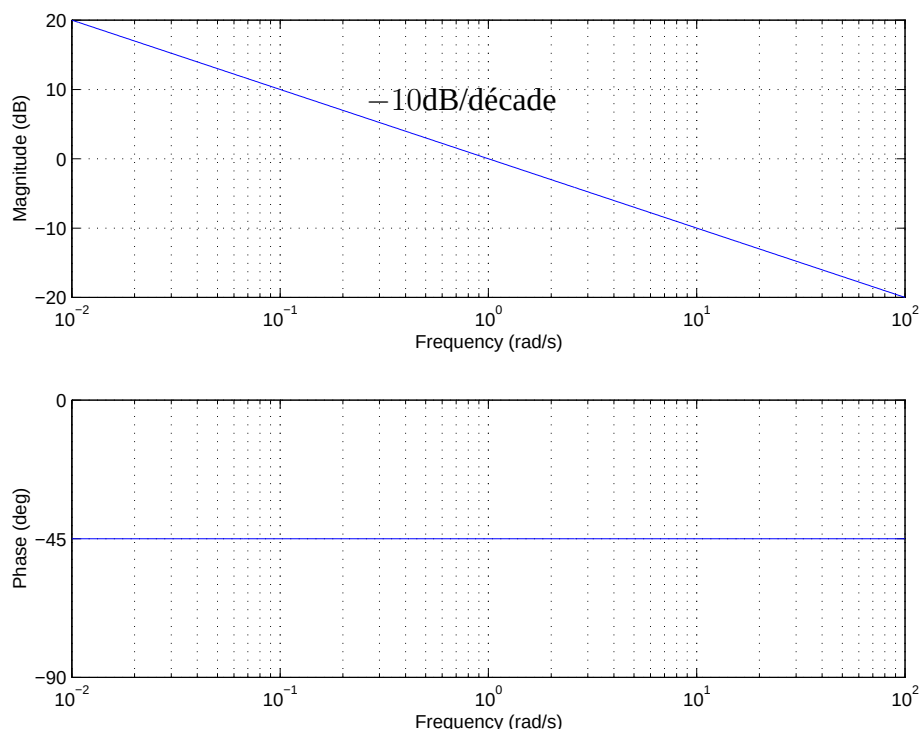
$$\begin{cases} \text{Module (dB)} : & 20 \log \left| \frac{1}{(j\omega)^\nu} \right| = -20\nu \log \omega \\ \text{Argument (rad)} : & \arg \left(\frac{1}{(j\omega)^\nu} \right) = -\nu \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (2.2.9)$$

En ce qui concerne les diagrammes de *Bode*, le diagramme de gain est représenté par une droite dont la pente est fonction de l'ordre d'intégration ν , soit -20ν dB/décade. Quant au diagramme de phase, il est représenté par une droite horizontale d'ordonnée $\nu \frac{\pi}{2}$.

La figure 2.1 représente les diagrammes de *Bode* d'un intégrateur non entier d'ordre 0.5. Le gain décroît à raison de -10 dB/décade et la phase est égale à $-\pi/4$.

2.2.2 Dérivation réelle

Bien qu'il existe plusieurs approches de généralisation de la dérivée d'ordre entier à des ordres réels, seules trois définitions sont présentées ici.


 FIG. 2.1 – Diagramme de *Bode* d'un intégrateur d'ordre 0.5

2.2.2.1 Définition de *Riemann-Liouville*

La dérivée d'ordre réel $\nu \in \mathbb{R}_+^*$ d'une fonction f est définie comme étant la dérivée d'ordre entier $\lfloor \nu \rfloor + 1$ de l'intégrale d'ordre non entier $(\lfloor \nu \rfloor + 1 - \nu)$, soit [?]:

$$\mathbf{D}^\nu f(t) \triangleq \mathbf{D}^{\lfloor \nu \rfloor + 1} \left(\mathbf{I}^{\lfloor \nu \rfloor + 1 - \nu} f(t) \right), \quad (2.2.10)$$

où $\lfloor \nu \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à ν ($\lfloor \nu \rfloor = \text{floor}(\nu)$).

Compte tenu de la définition de l'intégrale (2.2.6), la dérivée d'ordre ν de f s'écrit :

$$\mathbf{D}^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(\lfloor \nu \rfloor + 1 - \nu)} \frac{d^{\lfloor \nu \rfloor + 1}}{dt^{\lfloor \nu \rfloor + 1}} \left(\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\nu - \lfloor \nu \rfloor}} d\tau \right). \quad (2.2.11)$$

2.2.2.2 Définition de *Caputo*

Une deuxième définition de la dérivée d'ordre réel a été proposée par *Caputo* [?]. Elle résulte de la permutation de la dérivée et de l'intégrale dans l'équation (2.2.10), soit :

$$\mathbf{D}^\nu f(t) = \mathbf{I}^{\lfloor \nu \rfloor + 1 - \nu} \left(\mathbf{D}^{\lfloor \nu \rfloor + 1} f(t) \right), \quad (2.2.12)$$

Compte tenu de la définition de l'intégrale (2.2.6), la dérivée d'ordre ν de f s'écrit :

$$\mathbf{D}^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(\lfloor \nu \rfloor + 1 - \nu)} \int_0^t \frac{f^{(\lfloor \nu \rfloor + 1)}(\tau)}{(t - \tau)^{\nu - \lfloor \nu \rfloor}} d\tau. \quad (2.2.13)$$

2.2.2.3 Définition de Grünwald

Grünwald a proposé une généralisation de la définition de la dérivée d'ordre entier n à une dérivée d'ordre réel $\nu \in \mathbb{R}_+^*$ [?].

Soit la dérivée d'ordre 1 donnée par :

$$\mathbf{D}^1 f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t - h)}{h}, \quad (2.2.14)$$

la dérivation à l'ordre 2 conduit à :

$$\mathbf{D}^2 f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t - h) + f(t - 2h)}{h^2}, \quad (2.2.15)$$

une première généralisation à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ est alors donnée par :

$$\mathbf{D}^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n \left((-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh) \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.2.16)$$

la généralisation de la définition de la dérivée (2.2.16) à des ordres de dérivation non entiers, donne :

$$\mathbf{D}^\nu f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \left((-1)^k \binom{\nu}{k} f(t - kh) \right), \quad \nu \in \mathbb{R}_+. \quad (2.2.17)$$

La notation $\binom{k}{\nu}$ désigne le binôme de *Newton* généralisé à des ordres réels :

$$\binom{k}{\nu} = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{k! \Gamma(\nu - k + 1)}. \quad (2.2.18)$$

avec :

$$\binom{k}{\nu} = 0 \quad \text{pour} \quad \nu - k = -1, -2, -3, \dots \quad (2.2.19)$$

2.2.2.4 Transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction

La transformée de *Laplace* de la dérivée d'ordre ν d'une fonction f réelle est donnée par :

$$\mathcal{L}(\mathbf{D}^\nu f(t)) = s^\nu \mathcal{L}(f(t)). \quad (2.2.20)$$

Les caractéristiques fréquentielles de l'opérateur de dérivation s^ν , obtenues en remplaçant la variable de *Laplace* s par $j\omega$, sont telles que le module et l'argument s'expriment par :

$$\begin{cases} \text{Module (dB)} : & 20 \log |(j\omega)^\nu| = 20\nu \log(\omega), \\ \text{Argument (rad)} : & \arg((j\omega)^\nu) = \nu \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (2.2.21)$$

Les diagrammes de *Bode* de la figure 2.2 sont ceux d'un dérivateur non entier d'ordre 0.5. Le gain croît à raison de 10dB par décade et la phase est égale à $\pi/4$.

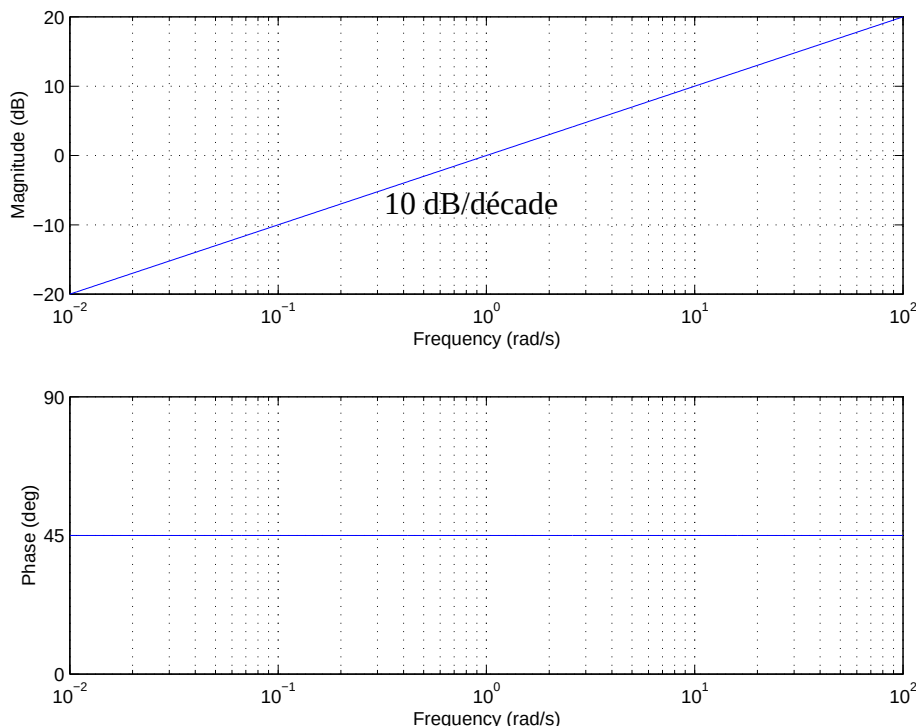


FIG. 2.2 – Diagramme de *Bode* d'un dérivateur d'ordre 0.5

2.3 Intégration et dérivation par intervalle

Dans cette partie, la définition de l'intégration et de la dérivation réelle est étendue aux intervalles réels. L'idée de base consiste à transformer l'ordre d'intégration ou de dérivation ν en un intervalle non entier $[\nu]$.

2.3.1 Définition de l'intégrale par intervalle réel

La définition de l'intégrale de *Riemman-Liouville* d'ordre ν d'une fonction f (2.2.6) est étendue à un intervalle réel $[\nu]$:

$$\mathbf{I}^{[\nu]} f(t) \triangleq \{\mathbf{I}^\nu f(t) \mid \nu \in [\nu]\}, \quad (2.3.1)$$

$$\mathbf{I}^{[\nu]} f(t) \triangleq \left\{ \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\nu}} d\tau, \quad \nu \in [\nu] \right\}, \quad (2.3.2)$$

avec

$$[\nu] = [\underline{\nu}, \overline{\nu}] = \{\nu \in \mathbb{R}_+^* \mid \underline{\nu} \leq \nu \leq \overline{\nu}\}. \quad (2.3.3)$$

A cause de la double occurrence de ν dans la définition (2.3.2), une fois dans la fonction Γ et une fois au dénominateur de la fonction intégrée, et du pessimisme que cela induit, la notation d'une variable intervalle n'est pas utilisée dans cette définition. Il est effectivement préférable de définir l'intégrale d'ordre $[\nu]$ en utilisant une variable réelle ν appartenant à $[\nu]$.

Exemple 2.3.1 Soit la fonction

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0, \end{cases} \quad (2.3.4)$$

l'intégrale par intervalle réel $[\nu] = [0.5, 1.5]$ de $f(t)$ est donnée par :

$$\mathbf{I}^{[\nu]} f(t) \triangleq \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t \frac{\tau^2}{(t-\tau)^{1-\nu}} d\tau, \quad \nu \in [0.5, 1.5], \quad (2.3.5)$$

La figure 2.3 présente l'intégrale réelle pour différentes valeurs de $\nu \in [\nu]$.

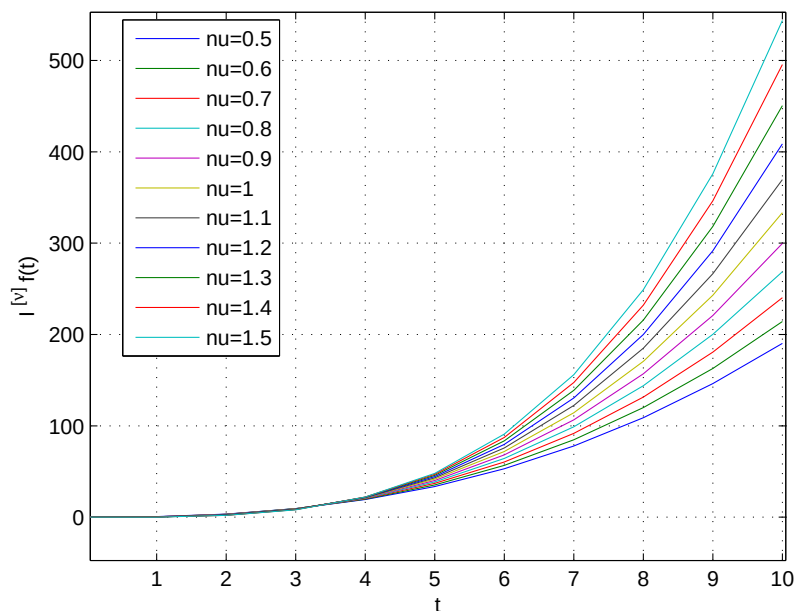


FIG. 2.3 – Intégrale de Riemman-Liouville de la fonction $f(t) = t^2$ pour différentes valeurs de $\nu \in [\nu]$

2.3.1.1 Transformée de *Laplace* de l'intégrale par intervalle d'une fonction

La transformée de *Laplace* de l'intégrale de *Riemman-Liouville* d'ordre $[\nu]$ d'une fonction f réelle est donnée par :

$$\mathcal{L}\{\mathbf{I}^{[\nu]}(f(t))\} = \frac{1}{s^\nu} \mathcal{L}\{f(t)\}, \quad \nu \in [\nu]. \quad (2.3.6)$$

Dans la mesure où l'occurrence de ν est ici unique, la notation de la variable intervalle peut être utilisée en exposant de s :

$$\mathcal{L}\{\mathbf{I}^{[\nu]}(f(t))\} = \frac{1}{s^{[\nu]}} \mathcal{L}\{f(t)\}. \quad (2.3.7)$$

Domaine de définition $\mathbb{D}$	0^+	1	$+\infty$
$\frac{d(f_G([\nu]))}{d[\nu]} = -20 \log(\omega)$	+		–
$f_G([\nu]) = -20[\nu] \log(\omega)$	$\nearrow$ 0	$+\infty$	$\searrow$ $-\infty$
$\frac{d(f_\phi([\nu]))}{d[\nu]} = -\frac{\pi}{2}$		–	
$f_\phi([\nu]) = -[\nu] \frac{\pi}{2}$	0		$\searrow$ $-\infty$

TAB. 2.1 – Table de variation du gain et de la phase de l'intégrateur par intervalle en fonction de $[\nu]$

Les caractéristiques fréquentielles de l'opérateur $\frac{1}{s^{[\nu]}}$ sont obtenues en remplaçant la variable de Laplace s par $j\omega$. Ainsi, le module et l'argument de l'opérateur d'intégration d'ordre $[\nu]$ sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 f_G([\nu]) &= \left| \frac{1}{s^{[\nu]}} \right|_{\text{dB}} = 20 \log \left| \frac{1}{(j\omega)^{[\nu]}} \right|, \\
 f_\phi([\nu]) &= \arg \left(\frac{1}{s^{[\nu]}} \right) = \arg \left(\frac{1}{(j\omega)^{[\nu]}} \right).
 \end{aligned}
 \tag{2.3.8}$$

2.3.1.2 Étude de la monotonie du gain et de la phase par rapport à l'ordre $[\nu]$ de l'intégrateur par intervalle

L'étude de la variation des fonctions $f_G([\nu])$ et $f_\phi([\nu])$ par rapport à l'intervalle $[\nu]$ requiert le calcul des dérivées de ces fonctions par rapport à l'intervalle $[\nu]$, avec $[\nu] \subset \mathbb{IR}^+$.

$$\begin{cases} \frac{d(f_G([\nu]))}{d[\nu]} = -20 \log(\omega), \\ \frac{d(f_\phi([\nu]))}{d[\nu]} = -\frac{\pi}{2}. \end{cases}
 \tag{2.3.9}$$

La table 2.1 représente les variations des fonctions $f_G([\nu])$ et $f_\phi([\nu])$

Selon la valeur de ω , le module s'écrit :

$$\begin{cases} \left| \frac{1}{s^{[\nu]}} \right|_{\text{dB}} = [-20\underline{\nu} \log \omega, -20\overline{\nu} \log \omega], & \text{lorsque } \omega \in]0^+, 1^-, \\ \left| \frac{1}{s^{[\nu]}} \right|_{\text{dB}} = [-20\overline{\nu} \log \omega, -20\underline{\nu} \log \omega], & \text{lorsque } \omega \in [1^+, +\infty[. \end{cases}
 \tag{2.3.10}$$

La fonction $f_\phi([\nu])$ est monotoniquement décroissante sur l'intervalle $]0^+, +\infty[$,

$$f_\phi([\nu]) = [-\bar{\nu}\frac{\pi}{2}, -\underline{\nu}\frac{\pi}{2}]. \quad (2.3.11)$$

En ce qui concerne les diagrammes de *Bode*, le diagramme de gain est représenté par un secteur constitué d'un ensemble de droites (intégrateurs), dont les pentes sont fonction de l'intervalle $[\nu]$.

Quant au diagramme de phase, il est représenté par un secteur constitué d'un ensemble de droites horizontales d'ordonnées comprises dans $[-\bar{\nu}\frac{\pi}{2}, -\underline{\nu}\frac{\pi}{2}]$.

La figure 2.4 représente les diagrammes de *Bode* de l'ensemble d'intégrateurs non entiers pour un ordre d'intégration $[\nu] = [0.5, 0.7]$. Le gain décroît à raison de $[-14, -10]$ dB/décade, la phase quant à elle est égale à $[-7\pi/20, -\pi/4]$.

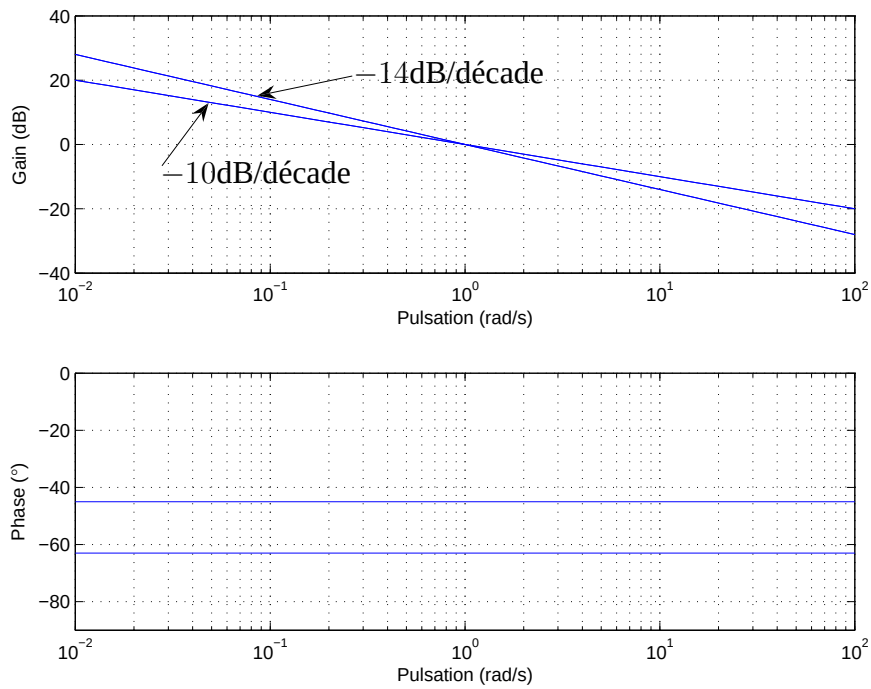


FIG. 2.4 – Diagramme de *Bode* d'un intégrateur d'ordre 0.5 et 0.7

Comme le montre cette étude, la fonction du gain, $f_G([\nu])$, n'est pas monotone par rapport à l'ordre de dérivation $[\nu]$ sur tout le domaine de définition $D =]0^+, +\infty[$ contrairement à la fonction de la phase, $f_\phi([\nu])$, qui est monotone par rapport à l'ordre de dérivation $[\nu]$, sur tout le domaine fréquentielle.

2.3.2 Définition de la dérivée par intervalle réel

La définition de la dérivée d'ordre réel d'une fonction f est étendue à un intervalle réel $[\nu]$:

$$\mathbf{D}^{[\nu]} f(t) = \{\mathbf{D}^\nu f(t) \mid \nu \in [\nu]\}, \quad (2.3.12)$$

La définition de *Riemann-Liouville* de la dérivée non entière d'une fonction f (2.2.11) est étendu à un intervalle $[\nu]$, soit :

$$\mathbf{D}^{[\nu]} f(t) = \frac{1}{\Gamma([\nu] - \nu + 1)} \frac{d^{[\nu]+1}}{dt^{[\nu]+1}} \left(\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\nu - [\nu]}} d\tau \right), \quad \nu \in [\nu], \quad (2.3.13)$$

avec

$$[\nu] = [\underline{\nu}, \overline{\nu}] = \{\nu \in \mathbb{R}_+^* \mid \underline{\nu} \leq \nu \leq \overline{\nu}\}. \quad (2.3.14)$$

De même, la définition de *Caputo* de la dérivée non entière d'une fonction f (2.2.13) est étendu à un intervalle $[\nu]$, soit :

$$\mathbf{D}^{[\nu]} f(t) = \frac{1}{\Gamma([\nu] + 1 - \nu)} \left(\int_0^t \frac{f^{([\nu]+1)}(\tau)}{(t - \tau)^{\nu - [\nu]}} d\tau \right), \quad \nu \in [\nu]. \quad (2.3.15)$$

De plus, la définition de *Grünwald* de la dérivée non entière d'une fonction f (2.2.17) est étendue à un intervalle $[\nu]$, soit :

$$\mathbf{D}^{[\nu]} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \left((-1)^k \binom{k}{\nu} f(t - kh) \right), \quad \nu \in [\nu]. \quad (2.3.16)$$

A cause des multiples occurrences de ν dans les définitions (2.3.13), (2.3.15) et (2.3.16), et du pessimisme que cela induit, la notation d'une variable intervalle n'a pas été utilisée dans cette définition. Il est effectivement préférable de définir la dérivée d'ordre $[\nu]$ en utilisant une variable réelle ν appartenant à $[\nu]$.

Exemple 2.3.2 Soit la fonction

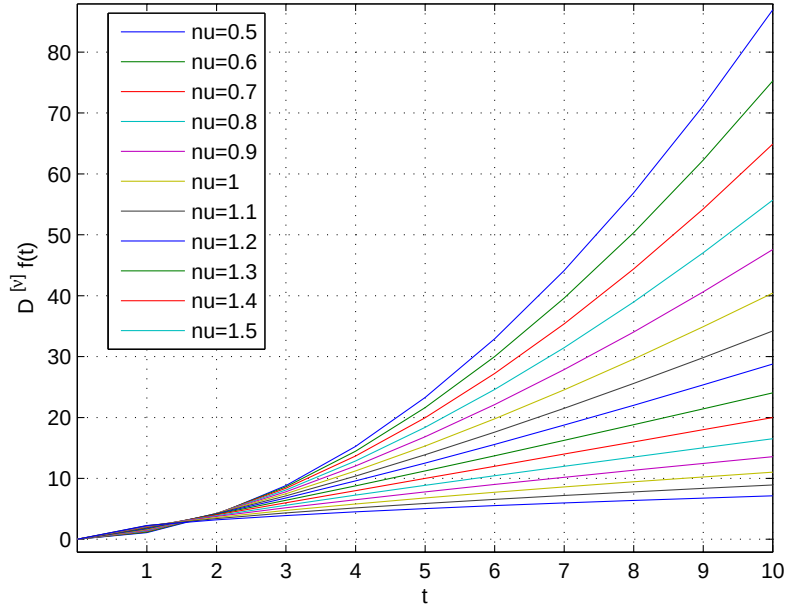
$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0, \end{cases} \quad (2.3.17)$$

la dérivée par intervalle réel $[\nu] = [0.5, 1.5]$ est donnée selon :

– la définition de *Riemann-Liouville*

1. Cas où $\nu \in [0.5, 1[$

$$\mathbf{D}^{[\nu]} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \nu)} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \frac{\tau^2}{(t - \tau)^\nu} d\tau \right), \quad \nu \in [\nu], \quad (2.3.18)$$


 FIG. 2.5 – Dérivée réelle de la fonction $f(t) = t^2$ pour des différents valeurs de $\nu \in [\nu]$

2. Cas où $\nu \in [1, 1.5]$

$$\mathbf{D}^{[\nu]} f(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\nu)} \frac{d^2}{dt^2} \left(\int_0^t \frac{\tau^2}{(t-\tau)^{\nu-1}} d\tau \right), \quad \nu \in [\nu], \quad (2.3.19)$$

– la définition de Caputo

1. Cas où $\nu \in [0.5, 1[$

$$\mathbf{D}^{[\nu]} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \left(\int_0^t \frac{2\tau}{(t-\tau)^{\nu}} d\tau \right), \quad \nu \in [\nu], \quad (2.3.20)$$

2. Cas où $\nu \in [1, 1.5]$

$$\mathbf{D}^{[\nu]} f(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\nu)} \left(\int_0^t \frac{2}{(t-\tau)^{\nu-1}} d\tau \right), \quad \nu \in [\nu], \quad (2.3.21)$$

– la définition de Grünwald

$$\mathbf{D}^{[\nu]} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \left((-1)^k \binom{k}{\nu} (t - kh)^2 \right), \quad \nu \in [\nu]. \quad (2.3.22)$$

La figure 2.5 présente la dérivée réelle pour différentes valeurs de $\nu \in [\nu]$

2.3.2.1 Transformée de *Laplace* de la dérivée par intervalle d'une fonction

Sous l'hypothèse de conditions initiales nulles, la transformée de *Laplace* de la dérivée d'ordre $[\nu]$ d'une fonction au sens de *Riemann* et de *Caputo* est donnée par :

$$\mathcal{L}\{\mathbf{D}^{[\nu]}(f(t))\} = s^{[\nu]} \mathcal{L}\{f(t)\}. \quad (2.3.23)$$

Dans la mesure où l'occurrence de ν est ici unique, la notation de la variable intervalle peut être utilisée :

$$\mathcal{L}\{\mathbf{D}^{[\nu]}(f(t))\} = s^{[\nu]} \mathcal{L}\{f(t)\}. \quad (2.3.24)$$

Les caractéristiques fréquentielles de l'opérateur $s^{[\nu]}$ sont obtenues en remplaçant la variable de *Laplace* s par $j\omega$. Ainsi, le module et l'argument de la dérivée d'ordre $[\nu]$ sont donnés par :

$$\begin{cases} f_G([\nu]) = |s^{[\nu]}|_{\text{dB}} = 20 \log |(j\omega)^{[\nu]}|, \\ f_\phi([\nu]) = \arg(s^{[\nu]}) = \arg((j\omega)^{[\nu]}). \end{cases} \quad (2.3.25)$$

2.3.2.2 Étude de la monotonie du gain et de la phase par rapport à $[\nu]$ du dérivateur par intervalle

L'étude de la variation des fonctions $f_G([\nu])$ et $f_\phi([\nu])$ par rapport à l'intervalle $[\nu]$ requiert le calcul des dérivées de ces fonctions par rapport à l'intervalle $[\nu]$, avec $[\nu] \subset \mathbb{IR}^+$

$$\begin{cases} \frac{d(f_G([\nu]))}{d[\nu]} = 20 \log(\omega), \\ \frac{d(f_\phi([\nu]))}{d[\nu]} = \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (2.3.26)$$

La table 2.2 représente les variations des fonctions $f_G([\nu])$ et $f_\phi([\nu])$

Selon la valeur de ω , le module s'écrit :

$$\begin{cases} |s^{[\nu]}|_{\text{dB}} = [20\overline{\nu} \log \omega, 20\underline{\nu} \log \omega], & \text{lorsque } \omega \in]0^+, 1^-, \\ |s^{[\nu]}|_{\text{dB}} = [20\underline{\nu} \log \omega, 20\overline{\nu} \log \omega], & \text{lorsque } \omega \in [1^+, +\infty[. \end{cases} \quad (2.3.27)$$

La fonction $f_\phi([\nu])$ est monotoniquement croissante sur l'intervalle $]0^+, +\infty[$,

$$f_\phi([\nu]) = [\underline{\nu} \frac{\pi}{2}, \overline{\nu} \frac{\pi}{2}]. \quad (2.3.28)$$

Domaine de définition $\mathbb{D}$	0^+	1	$+\infty$
$\frac{d(f_G([\nu]))}{d[\nu]} = 20 \log(\omega)$	–		+
$f_G([\nu]) = 20[\nu] \log(\omega)$	0 $\searrow$ $-\infty$		$+\infty$ $\nearrow$ 0
$\frac{d(f_\phi([\nu]))}{d[\nu]} = \frac{\pi}{2}$		+	
$f_\phi([\nu]) = [\nu] \frac{\pi}{2}$	0		$+\infty$ $\nearrow$

TAB. 2.2 – Table de variation du gain et de la phase du dérivateur par intervalles en fonction de $[\nu]$

En ce qui concerne les diagrammes de *Bode*, le diagramme de gain est représenté par un secteur constitué d'un ensemble de droites (dérivateurs), dont les pentes sont fonction de l'intervalle $[\nu]$. Les pentes des deux droites qui bornent cet ensemble sont données par l'intervalle $[20\underline{\nu}, 20\overline{\nu}]$ dB/décade.

Quant au diagramme de phase, il est représenté par un secteur constitué d'un ensemble de droites horizontales d'ordonnée comprise dans $[\underline{\nu} \frac{\pi}{2}, \overline{\nu} \frac{\pi}{2}]$.

La figure 2.6 représente les diagrammes de *Bode* de l'ensemble de dérivateurs non entiers pour un ordre de dérivation $[\nu] = [0.5, 0.7]$. Le gain croît à raison de $[10, 14]$ dB/décade. La phase, quant à elle, est égale à $[\pi/4, 7\pi/20]$.

Comme le montre cette étude, la fonction du gain, $f_G([\nu])$, n'est pas monotone par rapport à l'ordre de dérivation $[\nu]$ sur tout le domaine de définition $D =]0^+, +\infty[$ contrairement à la fonction de la phase, $f_\phi([\nu])$, qui est monotone par rapport à l'ordre de dérivation $[\nu]$, sur tout le domaine fréquentielle.

2.3.3 Étude de la monotonie de la réponse temporelle d'un système par rapport à l'ordre de dérivation par intervalle

Il est important de rappeler quelques notions sur les systèmes monotones avant d'aborder les problèmes de monotonie dans le domaine temporel pour les systèmes non entiers.

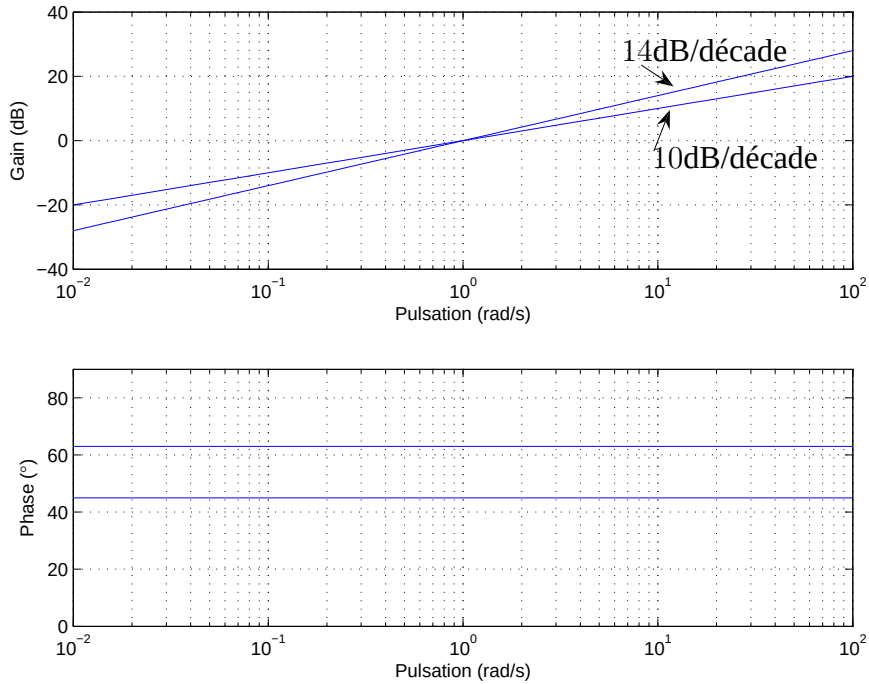


FIG. 2.6 – Diagrammes de Bode de dérivateurs d'ordre 0.5 et 0.7

Systèmes monotones :

Les systèmes dynamiques monotones, représentés par des équations différentielles monotones, génèrent des trajectoires qui respectent, sur un domaine de définition donné, la relation d'ordre supérieur $\geq$ définie par rapport aux conditions initiales [?], [?], [?] et [?]. Autrement dit :

Soient $\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0, \mathbf{u}_1)$ et $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_2)$ deux trajectoires solutions d'un système dynamique monotone défini par

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (2.3.29)$$

pour $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{z}_0$, $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_1$ et pour $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}_0$ et $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_2$, si

$$\mathbf{x}_0 \geq \mathbf{z}_0 \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_2 \geq \mathbf{u}_1 \quad \text{alors} \quad \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_2) \geq \mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0, \mathbf{u}_1), \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.3.30)$$

Ici la relation d'ordre $\geq$ doit être respectée composante par composante, c'est-à-dire que $x_{0,i} \geq z_{0,i} \forall i \in \{1, \dots, n\}$ et $u_{2,j} \geq u_{1,j} \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}$ où n et m sont respectivement les dimensions des vecteurs $\mathbf{y}$ et $\mathbf{u}$.

Dans le cas où les conditions initiales et/ou les paramètres de l'équation différentielle ordinaire présentent des incertitudes, l'intégration garantie basée sur les modèles de Taylor in-

tervalles, s'avère nécessaire pour calculer l'ensemble de solutions (l'ensemble de trajectoires admissibles). Par ailleurs, si l'équation différentielle est monotone il est toujours possible de transformer l'EDO (Équation Différentielle Ordinaire) monotone incertaine en deux EDO monotones certaines, une minimale et l'autre maximale. Ainsi, la résolution de ces deux EDO fournit des approximations inférieure et supérieure des solutions de l'EDO incertaine. Par conséquent, l'étude de la monotonie des EDO permet de contourner efficacement le problème de la propagation du pessimisme dû simultanément à l'effet d'enveloppement et au phénomène de dépendance.

L'idée d'encadrer un système incertain par deux systèmes déterministes minorant et majorant $\underline{\mathbf{y}}$ et $\bar{\mathbf{y}}$ a été introduite par Müller [?]. Plusieurs études, dont [?], [?], [?] et [?], utilisent le théorème de Müller pour encadrer l'ensemble des trajectoires des systèmes dynamiques en présence d'incertitudes sur l'état initial et/ou le vecteur de paramètres. Des exemples concrets sont ainsi détaillés dans les thèses de [?] et [?] comparant la méthode de construction des systèmes bornant avec la méthode basée sur l'intégration numérique garantie.

Dans le cas des systèmes non entiers, un système dynamique est décrit par une équation différentielle non entière (EDNE) de la forme :

$$\mathbf{D}^\nu \mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t)). \quad (2.3.31)$$

Dans le cas où l'ordre non entier est mal connu, L'EDNE est incertaine et la solution exacte est comprise dans un ensemble de trajectoires admissibles $\mathbb{Y}(t)$. L'EDNE s'écrit alors :

$$\mathbf{D}^{[\nu]} \mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t)). \quad (2.3.32)$$

Ainsi, il est intéressant de déterminer un encadrement $[\mathbf{y}(t)] = [\underline{\mathbf{y}}(t), \bar{\mathbf{y}}(t)]$ de l'ensemble de trajectoires admissibles $\mathbb{Y}(t)$ du système (2.3.32), en se basant sur les règles introduites par [?] basées sur le théorème de Müller [?]. Autrement dit, il est intéressant de vérifier s'il est possible de borner l'ensemble de trajectoires admissibles $\mathbb{Y}(t)$ du système (2.3.32) par deux systèmes déterministes minorant et majorant de la forme :

$$\mathbf{D}^{\underline{\nu}} \mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(\underline{\mathbf{y}}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (2.3.33)$$

$$\mathbf{D}^{\bar{\nu}} \mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{y}}(t), \mathbf{u}(t)). \quad (2.3.34)$$

Ce problème est difficile à traiter dans le cas général. De plus, une étude de variation de $\mathbf{f}$ par rapport à l'ordre de dérivation est nécessaire. Elle dépend de l'entrée $\mathbf{u}$, de la sortie $\mathbf{y}$, de la fonction $\mathbf{f}$ et du vecteur de paramètres $\mathbf{y}$ compris l'ordre de dérivation. On peut cependant montrer sur un exemple simple que l'étude de monotonie de la fonction $\mathbf{f}$ par rapport à l'ordre de dérivation lorsque l'entrée est un échelon unité n'est pas du tout trivial.

Exemple 2.3.3 Soit le système décrit par l'équation différentielle :

$$\mathbf{D}^\nu y(t) + \lambda y(t) = u(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}^+, \quad (2.3.35)$$

où $u(t)$ représente l'échelon de Heaviside.

Sous l'hypothèse de conditions initiales nulles, la transformée de Laplace de l'équation différentielle (2.3.35) est donnée par :

$$s^\nu Y(s) + \lambda Y(s) = \frac{1}{s} U(s), \quad (2.3.36)$$

Par conséquent, la fonction de transfert est de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{1}{s(s^\nu + \lambda)}, \\ &= \frac{1}{s^{\nu+1} \left(1 + \frac{\lambda}{s^\nu}\right)}. \end{aligned} \quad (2.3.37)$$

Le développement limité de cette fonction est donné par :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^{\nu+1}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\lambda^k}{s^{\nu k}}, \quad (2.3.38)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\lambda^{k-1}}{s^{\nu k+1}}. \quad (2.3.39)$$

La transformée de Laplace inverse de la fonction de transfert $\frac{Y(s)}{U(s)}$ s'écrit :

$$f_\nu(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \lambda^{k-1} \frac{t^{\nu k}}{\Gamma(\nu k + 1)}. \quad (2.3.40)$$

L'étude de la variation de $f_\nu(t)$ par rapport à l'ordre de dérivation ν requiert le calcul de la dérivée de $f_\nu(t)$ par rapport à l'ordre de dérivation non entier ν :

$$\frac{d}{d\nu} f_\nu(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \lambda^{k-1} \left(\frac{k \log(t) t^{\nu k}}{\Gamma(\nu k + 1)} - \frac{k t^{\nu k} \Gamma'(\nu k + 1)}{\Gamma(\nu k + 1)^2} \right), \quad (2.3.41)$$

où $\Gamma'(\nu k + 1)$ représente la dérivée de la fonction $\Gamma(\nu k + 1)$ par rapport à $(\nu k + 1)$.

$$\frac{d}{d\nu} f_\nu(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\lambda^{k-1} t^{\nu k} k}{\Gamma(\nu k + 1)} (\log(t) - \Psi(\nu k + 1)), \quad (2.3.42)$$

où la fonction $\Psi(\nu k + 1)$ est la fonction Digamma définie par :

$$\Psi(\nu k + 1) = \frac{\Gamma'(\nu k + 1)}{\Gamma(\nu k + 1)}, \quad (2.3.43)$$

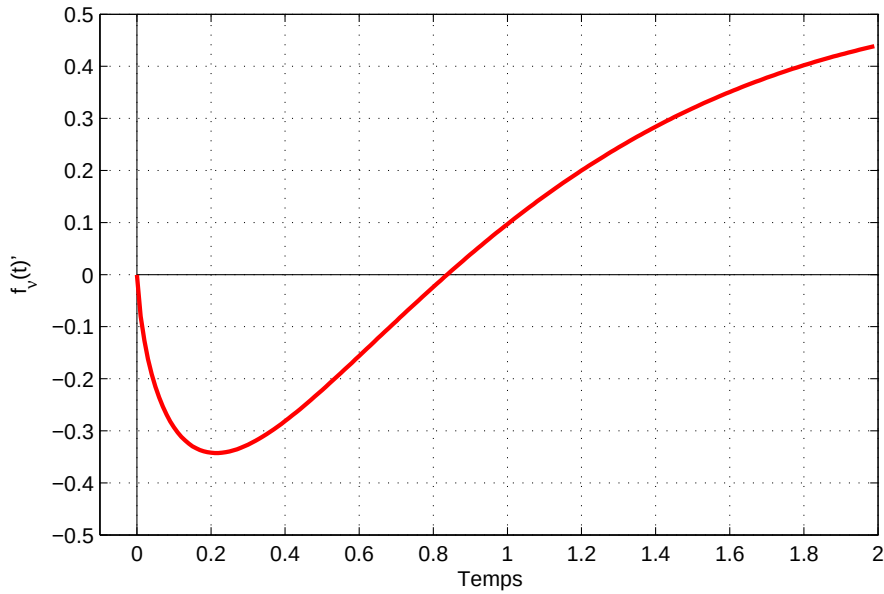


FIG. 2.7 – Tracé de la dérivée de la fonction $f_\nu(t)$ pour $\lambda = 1$ et $\nu = 0.9$

La figure 2.8 présente l'évolution de la dérivée de la fonction $f_\nu(t)$ pour un intervalle de temps de 0 à 2. Il est évident que pour une valeur de l'ordre de dérivation de $\nu \in]0.8, 0.9[$ la dérivée de la fonction $f_\nu(t)$ change de signe. Par conséquent la fonction f n'est pas monotone par rapport à l'ordre ν .

Le tracé des réponses indicielles de l'équation différentielle (2.3.35) montre bien que celles-ci ne sont pas monotones par rapport à l'ordre de dérivation.

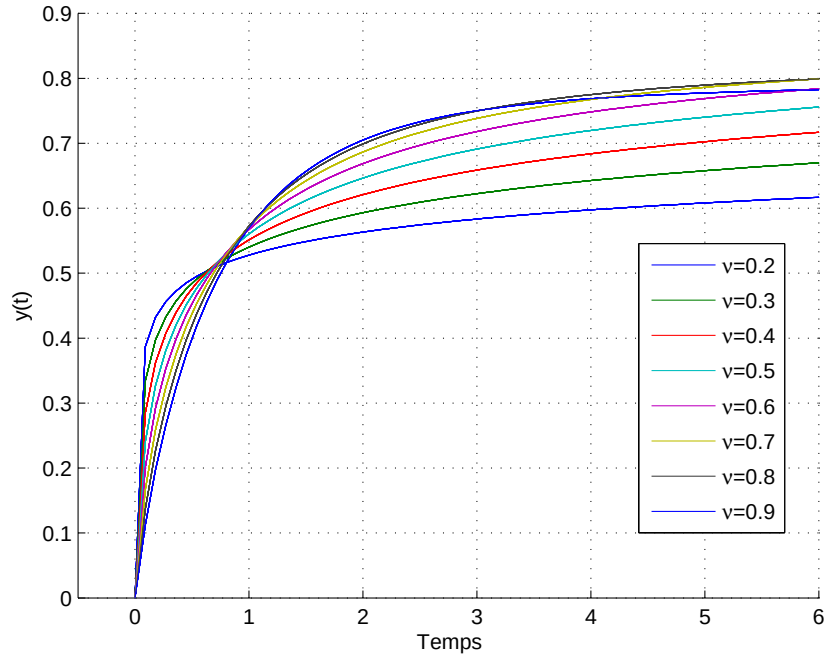
Comme le montre cet exemple simple, l'étude de la monotonie de la réponse temporelle par rapport à l'ordre de dérivation est assez compliquée, faisant appel à des fonctions non usuelles, comme la fonction Digamma, et permet de conclure sur la non monotonie de la réponse temporelle par rapport à l'ordre de dérivation.

2.4 Représentation des systèmes non entiers

2.4.1 Équation différentielle

Un système non entier peut être décrit par une équation différentielle de la forme :

$$y(t) + a_1 \mathbf{D}^{\alpha_1} y(t) + a_2 \mathbf{D}^{\alpha_2} y(t) + \dots + a_N \mathbf{D}^{\alpha_N} y(t) = b_0 \mathbf{D}^{\beta_0} u(t) + b_1 \mathbf{D}^{\beta_1} u(t) + b_2 \mathbf{D}^{\beta_2} u(t) + \dots + b_M \mathbf{D}^{\beta_M} u(t), \quad (2.4.1)$$


 FIG. 2.8 – Tracé des réponses indicielles $y(t)$ pour $\lambda = 1$ et différentes valeurs de ν

où $u(t)$ et $y(t)$ désignent respectivement l'entrée et la sortie et où les ordres de dérivation $\alpha_1, \dots, \alpha_N, \beta_0, \dots, \beta_M$ sont des nombres réels positifs ordonnés :

$$0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_N \quad \text{et} \quad 0 < \beta_0 < \dots < \beta_M. \quad (2.4.2)$$

Comme dans le cas d'une équation différentielle classique à dérivées entières, les ordres de dérivation doivent vérifier la contrainte $\alpha_N < \beta_N$ pour que le système soit strictement propre.

L'équation (2.4.1) peut être réécrite sous la forme d'une équation différentielle de type séquentiel, lorsque les ordres de dérivation sont commensurables d'ordre ν [?], [?], [?], [?] :

$$y(t) + a_1 \overbrace{\mathbf{D}^\nu(\dots(\mathbf{D}^\nu y(t)))}^{\frac{\alpha_1}{\nu} \text{ fois}} + \dots + a_n \overbrace{\mathbf{D}^\nu(\dots(\mathbf{D}^\nu y(t)))}^{\frac{\alpha_N}{\nu} \text{ fois}} = \underbrace{b_0 \mathbf{D}^\nu(\dots(\mathbf{D}^\nu u(t)))}_{\frac{\beta_0}{\nu} \text{ fois}} + \dots + b_m \underbrace{\mathbf{D}^\nu(\dots(\mathbf{D}^\nu y(t)))}_{\frac{\beta_M}{\nu} \text{ fois}}, \quad (2.4.3)$$

équation dans laquelle $\frac{\alpha_i}{\nu}, i = 1, \dots, N$ et $\frac{\beta_j}{\nu}, j = 0, \dots, M$ sont des nombres entiers.

Définition 2.4.1 L'ordre commensurable ν est le plus grand nombre réel tel que tous les ordres de dérivation de l'équation différentielle (2.4.1) sont ses multiples entiers :

$$\frac{\alpha_i}{\nu} \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, N \quad \text{et} \quad \frac{\beta_j}{\nu} \in \mathbb{N}, j = 0, \dots, M \quad (2.4.4)$$

Dans le cas des systèmes rationnels, l'ordre commensurable vaut 1.

Par rapport à la définition initiale de l'ordre commensurable donnée dans [?], la contrainte du plus grand nombre a été imposée pour faciliter les calculs, car la dimension du système α_N/ν est inversement proportionnelle à l'ordre commensurable ν .

2.4.2 Pseudo-représentation d'état des systèmes non entiers

La représentation d'état d'un système rationnel propre est définie par les deux équations suivantes

$$\begin{cases} x^{(1)}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (2.4.5)$$

où x est le vecteur d'état, A la matrice d'évolution, B la matrice de commande, C la matrice d'observation et D la matrice directe.

Comme dans le cas rationnel, une pseudo-représentation d'état non entière comporte deux équations :

- Une pseudo-équation d'état (où équation d'état non entière) dans laquelle le pseudo état ne fait plus objet d'une dérivation unitaire mais d'une dérivation d'ordre ν ,
- Une équation d'observation identique à celle du cas entier.

Elle est ainsi définie par :

$$\begin{cases} x^{(\nu)}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (2.4.6)$$

Remarque 2.4.1 Le vecteur x dans la représentation d'état des systèmes non entiers ne représente pas un vecteur d'état dans le sens classique du terme. En effet, dans une représentation d'état d'un système rationnel, la connaissance de l'état et de sa dérivée à l'instant 0 suffisent pour prédire l'état aux instants futurs. Cette connaissance n'est pas suffisante dans le cas des systèmes non entiers où la connaissance de tout le passé du système est nécessaire pour pouvoir prédire sa valeur à un instant future. Le problème d'initialisation d'un tel système à un instant t_0 à fait l'objet de plusieurs travaux récents [?], [?], [?], [?].

2.4.3 Fonction de transfert

La transformée de Laplace de l'équation différentielle (2.4.1), est donnée par :

$$\begin{aligned} Y(s) + a_1 s^{\alpha_1} Y(s) + a_2 s^{\alpha_2} Y(s) + \dots + a_N s^{\alpha_N} Y(s) = \\ b_0 s^{\beta_0} U(s) + b_1 s^{\beta_1} U(s) + b_2 s^{\beta_2} U(s) + \dots + b_M s^{\beta_M} U(s). \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Cette équation détermine directement la forme classique d'une fonction de transfert non entière :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^{\beta_0} + b_1 s^{\beta_1} + b_2 s^{\beta_2} + \dots + b_M s^{\beta_M}}{1 + a_1 s^{\alpha_1} + a_2 s^{\alpha_2} + \dots + a_N s^{\alpha_N}}. \quad (2.4.8)$$

Si le système est commensurable d'ordre ν , cette fonction de transfert peut être réécrite selon :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 (s^\nu)^{\frac{\beta_0}{\nu}} + b_1 (s^\nu)^{\frac{\beta_1}{\nu}} + b_2 (s^\nu)^{\frac{\beta_2}{\nu}} + \dots + b_M (s^\nu)^{\frac{\beta_M}{\nu}}}{1 + a_1 (s^\nu)^{\frac{\alpha_1}{\nu}} + a_2 (s^\nu)^{\frac{\alpha_2}{\nu}} + \dots + a_N (s^\nu)^{\frac{\alpha_N}{\nu}}}, \quad (2.4.9)$$

avec $\frac{\alpha_i}{\nu} \in \mathbb{N}, \forall i = 1, \dots, N$ et $\frac{\beta_j}{\nu} \in \mathbb{N}, \forall j = 0, \dots, M$.

Une notation particulière d'un transfert commensurable peut être définie par la fonction rationnelle R_ν :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = R_\nu(s^\nu), \quad (2.4.10)$$

avec :

$$R_\nu(p) = \frac{Q_\nu(p)}{P_\nu(p)} = \frac{b_0 p^{\frac{\beta_0}{\nu}} + b_1 p^{\frac{\beta_1}{\nu}} + b_2 p^{\frac{\beta_2}{\nu}} + \dots + b_M p^{\frac{\beta_M}{\nu}}}{1 + a_1 p^{\frac{\alpha_1}{\nu}} + a_2 p^{\frac{\alpha_2}{\nu}} + \dots + a_N p^{\frac{\alpha_N}{\nu}}}, \quad (2.4.11)$$

où Q_ν et P_ν sont deux polynômes à puissances entières et ν l'ordre commensurable.

Définition 2.4.2 Les zéros des polynômes Q_ν et P_ν , de la fonction de transfert F (2.4.8), sont nommés tout au long de cette thèse les zéros en s^ν et les pôles en s^ν de F .

2.4.3.1 Forme modale factorisée

Ce type de représentations met en évidence les zéros et les pôles en s^ν de la fonction de transfert.

Dans un premier niveau de généralisation, tous les zéros et les pôles en s^ν sont associés à l'ordre commensurable ν . La fonction de transfert est alors mise sous la forme :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_0 \frac{\prod_{k'=1}^{N'} (s^\nu - z_{k'})^{q_{k'}}}{\prod_{k=1}^N (s^\nu - s_k)^{q_k}}, \quad q_{k'} \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad q_k \in \mathbb{N}, \quad (2.4.12)$$

où G_0 est un gain, $z_{k'}$ et s_k étant respectivement les zéros et les pôles en s^ν de multiplicités respectives $q_{k'}$ et q_k .

Dans un deuxième niveau de généralisation, la fonction de transfert peut être représentée sous la forme :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_0 \frac{\prod_{k'=1}^{N'} (s^{\nu_{k'}} - z_{k'})^{q_{k'}}}{\prod_{k=1}^N (s^{\nu_k} - s_k)^{q_k}}, \quad q_{k'} \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad q_k \in \mathbb{N}, \quad (2.4.13)$$

où $z_{k'}$ et s_k sont respectivement les zéros en $s^{\nu_{k'}}$ et les pôles en s^{ν_k} de multiplicités respectives $q_{k'}$ et q_k .

En dehors de ces formes modales factorisées, d'autres formes, dites modales développées, peuvent également être obtenues.

2.4.3.2 Forme modale développée

Ce type de représentations met en évidence les modes propres du système.

Dans un premier niveau de généralisation, la fonction de transfert est mise sous la forme :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^r \frac{a_{k,r}}{(s^{\nu} - s_k)^l}, \quad (2.4.14)$$

où $s_k, k = 1, \dots, N$ sont les pôles en s^{ν} de multiplicités r de la fonction de transfert (2.4.8).

Dans un deuxième niveau de généralisation, les pôles en s^{ν} peuvent être associés à des ordres ν_k différents, la fonction de transfert pouvant alors s'écrire sous la forme :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^r \frac{a_{k,r}}{(s^{\nu_k} - s_k)^l}, \quad (2.4.15)$$

s_k étant les pôles en s^{ν_k} de multiplicités entières r .

2.5 Stabilité des systèmes non entiers

La stabilité des systèmes non entiers a été traitée dans plusieurs contextes (linéaire, non linéaire, commensurable, non commensurable, variant et invariant dans le temps, avec et sans retard, analytiquement, numériquement) par plusieurs auteurs (voir l'état de l'art dans l'article [?]).

Le critère de stabilité le plus connu pour les systèmes non entiers d'ordre commensurable ν est celui de *Matignon* [?]. En effet, *Matignon* a démontré la stabilité pour un ordre ν entre 0 et

1. Le théorème permet de vérifier la stabilité à travers le placement des pôles en s^ν au lieu des pôles en s . Dans l'article [?], le théorème a été étendu pour un ordre commensurable ν entre 1 et 2, les auteurs ont défini un nouvel ordre $\nu' = \frac{\nu}{2}$ et le théorème a été appliqué pour les pôles en $s^{\nu'}$ du système.

Dans la thèse de Aoun [?], le théorème a été validé pour n'importe quel ordre commensurable, et la démonstration de l'instabilité des systèmes non entiers pour des ordres supérieurs à 2 a été présentée.

Théorème 2.5.1 ((Matignon,1998) étendu)

Soient F la fonction de transfert (2.4.8) non entière et commensurable à l'ordre ν et $R_\nu = Q_\nu/P_\nu$ sa forme rationnelle irréductible (2.4.11). F est stable dans le sens BIBO ssi :

$$0 < \nu < 2, \quad (2.5.1)$$

et

$$\forall s_k \in \mathbb{C}, P_\nu(s_k) = 0 \quad \text{tel que} \quad |\arg(s_k)| > \nu \frac{\pi}{2}. \quad (2.5.2)$$

Afin de démontrer la validité du théorème de Matignon, il suffit de démontrer que F est instable ssi :

$$\nu \geq 2, \quad (2.5.3)$$

ou

$$\exists s_k \in \mathbb{C}, P_\nu(s_k) = 0 \quad \text{tel que} \quad |\arg(s_k)| \leq \nu \frac{\pi}{2}, \quad (2.5.4)$$

Soit $\{s_k\}_{k=1,\dots,N}$ l'ensemble des pôles en s^ν de $F(s)$ tel que $P_\nu(s_k) = 0$. La fonction multiforme $s \mapsto s^\nu$ se transforme en une fonction analytique après avoir effectué une coupure dans le plan complexe le long de $\mathbb{R}_-$. Par conséquent, tous les arguments de s sont restreint à $] -\pi, \pi[$ et les pôles en s de $F(s)$ sont alors donnés par :

$$p_{l,k} = |s_k|^{\frac{1}{\nu}} e^{j\left(\frac{\arg(s_k) + 2l\pi}{\nu}\right)}, \quad k = 1, \dots, N \quad \text{et} \quad l \in \mathbb{Z}, \quad (2.5.5)$$

tel que :

$$-\pi < \frac{\arg(s_k) + 2l\pi}{\nu} < \pi. \quad (2.5.6)$$

Le système représenté par $F(s)$ est instable ssi il existe un pôle à partie réelle positive, soit

$$\frac{-\pi}{2} < \frac{\arg(s_k) + 2l\pi}{\nu} < \frac{\pi}{2}. \quad (2.5.7)$$

Par conséquent, $F(s)$ est instable ssi il existe un $l \in \mathbb{Z}$ satisfaisant (2.5.7), ou bien un l satisfaisant l'inégalité

$$-\nu \frac{\pi}{2} - \arg(s_k) < 2l\pi < \nu \frac{\pi}{2} - \arg(s_k). \quad (2.5.8)$$

Pour des raisons de simplicité de calcul et sans perte de généralité, la détermination principale des arguments de s_k est définie dans $[-\pi, \pi[$.

Suivant la valeur de ν , deux cas peuvent se distinguer :

- $\nu \geq 2$ dans ce cas, $l = 0$ vérifie la contrainte (2.5.8). Par conséquent, F possède au moins N pôles instables $s_{k,0}, k = 0 \dots N$.
- $1 < \nu < 2$ l'unique valeur de l pourrait satisfaire (2.5.8) est $l = 0$ ssi 0 appartient à l'intervalle défini par (2.5.8), soit :

$$|\arg(s_k)| \leq \nu \frac{\pi}{2}. \quad (2.5.9)$$

Compte tenu des résultats obtenus pour $\nu \geq 2$ et $1 < \nu < 2$, la fonction de transfert est instable ssi :

$$\nu \geq 2, \quad (2.5.10)$$

ou

$$\exists s_k \in \mathbb{C}, P_v(s_k) = 0 \quad \text{tel que} \quad |\arg(s_k)| \leq \nu \frac{\pi}{2}, \quad (2.5.11)$$

Par contradiction, la fonction de transfert est stable ssi (2.5.1) et (2.5.2) sont satisfaites.

La figure 2.9 montre la région de stabilité pour différentes valeurs de l'ordre commensurable ν .

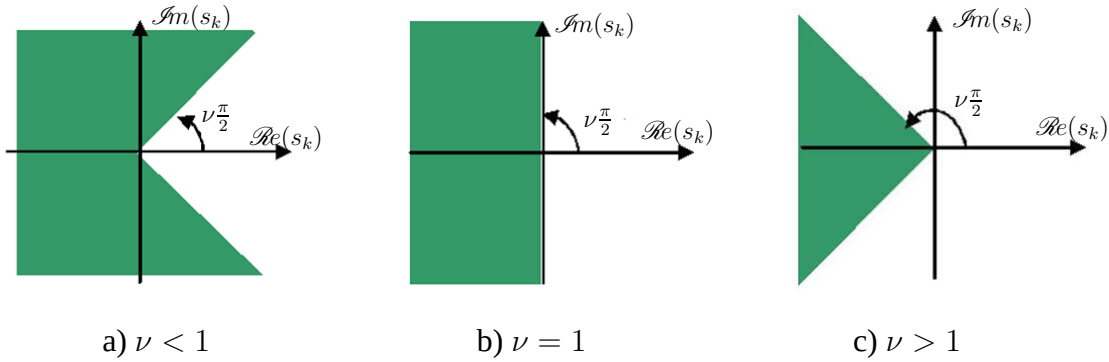


FIG. 2.9 – Région de stabilité. Un système est stable ssi ses pôles en s^ν sont à l'intérieur du domaine grisé

2.6 Fonctions de transfert élémentaires

Lors d'une modélisation de systèmes à partir de données fréquentielles, il est important de connaître les caractéristiques des fonctions de transfert élémentaires de première espèce (généralisation de la notion de fonction de transfert d'ordre un au cas non entier) et des fonctions de

transfert élémentaires de deuxième espèce (généralisation de la notion de fonction de transfert d'ordre deux au cas non entier) notamment en terme de stabilité et de résonance.

Par conséquent, les fonctions de transfert élémentaires sont étudiées dans ce paragraphe. Ce travail constitue une des contributions de cette thèse [?].

2.6.1 Fonction de transfert élémentaire de première espèce

La fonction de transfert élémentaire de première espèce obtenue à partir de la forme modale (2.4.15) est donnée sous sa forme canonique par :

$$F_1(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^\nu + 1}, \quad (2.6.1)$$

avec $\omega_n \in \mathbb{R}_+^*$ représente la fréquence naturelle non amortie.

2.6.1.1 Stabilité et résonance

La condition de stabilité de (2.6.1) est obtenue à partir du théorème de *Matignon étendu* :

$$0 < \nu < 2. \quad (2.6.2)$$

La réponse fréquentielle s'obtient en remplaçant s par $j\omega$ dans (2.6.1) :

$$F_1(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{e^{j\frac{\pi}{2}}\omega}{\omega_n}\right)^\nu + 1}. \quad (2.6.3)$$

Le gain en dB est donné par :

$$|F_1(j\Omega\omega_n)| = |\mathcal{F}_1(j\Omega)|_{\text{dB}} = -10 \log \left(1 + 2 \cos \left(\nu \frac{\pi}{2} \right) \Omega^\nu + \Omega^{2\nu} \right), \quad (2.6.4)$$

où $\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$ est la fréquence normalisée.

Dans le cas où $F_1(s)$ est résonant, $|\mathcal{F}_1(j\Omega)|_{\text{dB}}$ possède au moins un maximum à la fréquence Ω . Par conséquent, $F_1(s)$ est résonant si l'équation

$$\frac{d|\mathcal{F}_1(j\Omega)|_{\text{dB}}}{d\Omega} = 0 \Rightarrow 2\nu\Omega^{2\nu-1} + 2\nu \cos \left(\nu \frac{\pi}{2} \right) \Omega^{\nu-1} = 0 \quad (2.6.5)$$

possède au moins une solution réelle et strictement positive qui correspond à ce maximum. Une seule solution peut ainsi être obtenue à la fréquence :

$$\Omega_r^\nu = -\cos \left(\nu \frac{\pi}{2} \right), \quad (2.6.6)$$

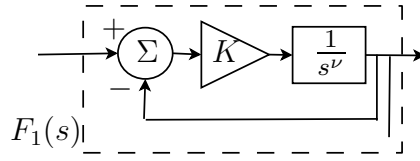


FIG. 2.10 – Schéma de la boucle fermée équivalente

à condition que

$$1 < \nu < 2. \quad (2.6.7)$$

Le gain à la fréquence de résonance est obtenu en remplaçant (2.6.6) dans (2.6.3) :

$$|\mathcal{F}_1(j\Omega_r)|_{\text{dB}} = -20 \log \left(\sin \left(\nu \frac{\pi}{2} \right) \right). \quad (2.6.8)$$

La phase à la fréquence de résonance est obtenue à partir de (2.6.3) :

$$\arg(\mathcal{F}_1(j\Omega_r)) = -\arctan \left(\frac{\sin \left(\nu \frac{\pi}{2} \right) \Omega_r^\nu}{1 + \cos \left(\nu \frac{\pi}{2} \right) \Omega_r^\nu} \right) = \arctan \left(\cot \left(\nu \frac{\pi}{2} \right) \right). \quad (2.6.9)$$

Par conséquent :

$$\arg(\mathcal{F}_1(j\Omega_r)) = (1 - \nu) \frac{\pi}{2}. \quad (2.6.10)$$

La fonction de transfert élémentaire de première espèce est résonante si la condition (2.6.7) est satisfaite. La fréquence de résonance est donnée par (2.6.6), et le gain et la phase à cette fréquence sont donnés par (2.6.8) et (2.6.10) respectivement.

2.6.1.2 Analyse de la fonction de transfert en boucle ouverte équivalente

La fonction de transfert élémentaire de première espèce (2.6.1) peut être représentée par le schéma en boucle fermée de la figure 2.10 ayant un gain $K = \omega_n^\nu$ et un intégrateur non entier. La fonction de transfert équivalente en boucle ouverte représente un intégrateur non entier $\frac{K}{s^\nu}$ dont la réponse fréquentielle est tracée sur le plan de *Nichols* sur la figure 2.11 pour $K = 1$ et différentes valeurs de ν . Les trois cas suivants se présentent :

- $\nu < 1$ (voir $\nu = 0.9$ par exemple), le diagramme de *Nichols* est à l'extérieur du contour de 0 dB. En conséquence, la fonction de transfert en boucle fermée n'est pas résonante ;
- $1 < \nu < 2$ (voir $\nu = 1.1$ et $\nu = 1.75$), le diagramme de *Nichols* pénètre à l'intérieur du contour de 0 dB ce qui conduit à un système résonant en boucle fermée ;
- $\nu \geq 2$ (voir $\nu = 2.5$ par exemple), le diagramme de *Nichols* est à gauche du point critique. Par conséquent, le système en boucle fermée est instable.

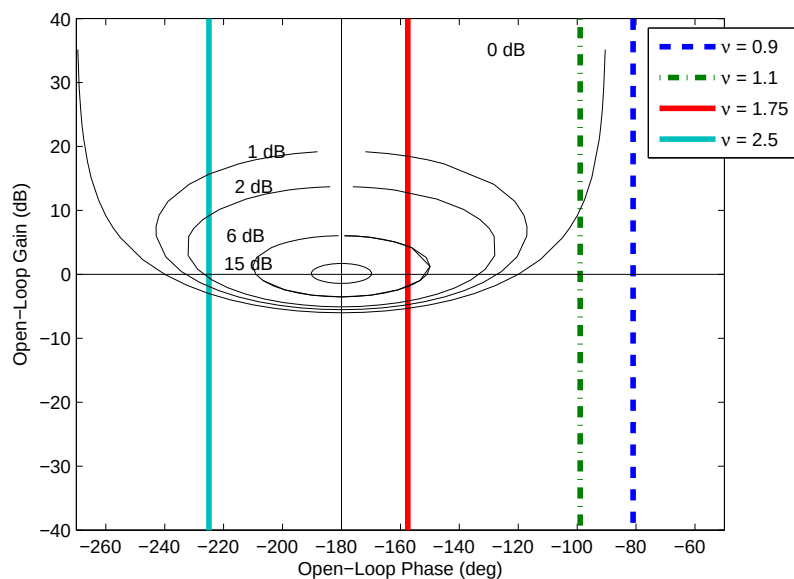


FIG. 2.11 – Diagramme de *Nichols* de la fonction de transfert en boucle ouverte pour des valeurs différentes de ν

Exemple 2.6.1 Soit la fonction de transfert élémentaire de première espèce :

$$F_1(s) = \frac{1}{s^{1.75} + 1}. \quad (2.6.11)$$

La condition de résonance présentée dans (2.6.7) est satisfaite dans cet exemple avec $\nu = 1.75$. Par conséquent, $F_1(s)$ est résonante à la fréquence de résonance $\Omega_r = 0.96$ (2.6.6), le gain et la phase à la fréquence de résonance sont donnés à partir de (2.6.8) et (2.6.10) respectivement par :

$$\left| \frac{F_1(j\Omega_r)}{F_1(j0)} \right|_{dB} = 8.34, \quad (2.6.12)$$

et

$$\arg(F_1(j\Omega_r)) = -67.5. \quad (2.6.13)$$

La figure 2.12 présente les diagrammes de Bode du gain et de la phase de ce système.

2.6.2 Fonction de transfert élémentaire de deuxième espèce

Lorsque le système possède des pôles en s^ν complexes conjugués, il est préférable comme dans le cas entier de le représenter par des fonctions de transfert élémentaires de deuxième

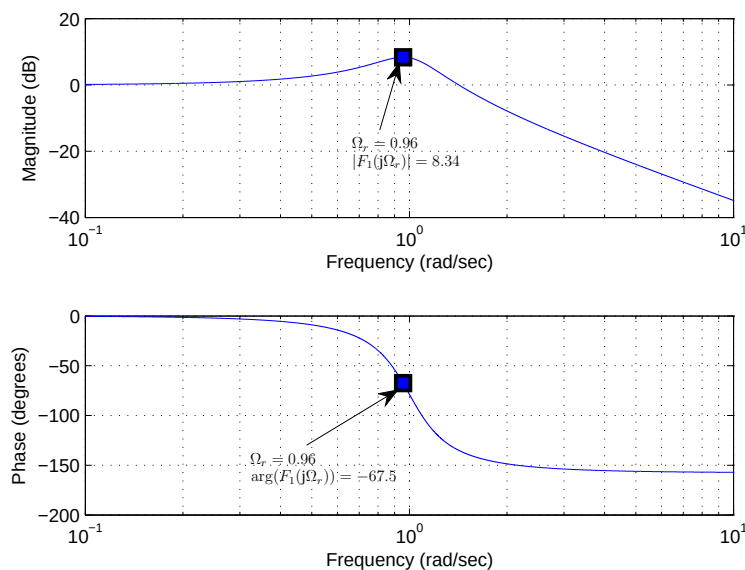


FIG. 2.12 – Diagramme de Bode de $F_1(s) = \frac{1}{s^{1.75+1}}$

espèce ayant des coefficients réels :

$$F_2(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^\nu + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^{2\nu}}, \quad (2.6.14)$$

avec $\zeta \in \mathbb{R}$, $\omega_n \in \mathbb{R}_+^*$, et $\nu \in \mathbb{R}_+^*$.

L'objectif de cette partie est d'étendre les propriétés d'une fonction de transfert rationnelle de deuxième ordre à une fonction de transfert non entière de deuxième espèce. Sachant que le système rationnel (2.6.14) avec $\nu = 1$:

- est stable si le facteur d'amortissement $\zeta > 0$,
- est résonant si $0 < \zeta < \frac{\sqrt{2}}{2}$,
- possède deux pôles complexes conjugués si $0 < \zeta < 1$,
- possède un pôle double si $\zeta = 1$,
- est sur-amortie si $\zeta > 1$.

Les conditions de stabilité de la fonction de transfert élémentaire de deuxième espèce sont d'abord déterminées en fonction du facteur d'amortissement ζ et de l'ordre non entier ν . Les conditions de résonance sont ensuite déterminées numériquement. Ainsi, trois abaques pour chaque fréquence de résonance sont tracés permettant d'obtenir le facteur d'amortissement et l'ordre non entier à partir de la fréquence de résonance normalisée, du gain et de la phase à cette fréquence.

2.6.2.1 Stabilité d'une fonction de transfert élémentaire de deuxième espèce

Les pôles en s^ν de (2.6.14) sont donnés par :

$$s_{1,2}^\nu = \omega_n^\nu \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right). \quad (2.6.15)$$

Deux cas se distinguent selon la valeur de $|\zeta|$:

$$\begin{cases} |\zeta| \geq 1 \Rightarrow & \text{les pôles en } s^\nu \text{ sont réels,} \\ |\zeta| < 1 \Rightarrow & \text{les pôles en } s^\nu \text{ sont complexes conjugués.} \end{cases}$$

Cas $|\zeta| \geq 1$:

La fonction de transfert (2.6.14) possède dans ce cas deux pôles réels en s^ν . Selon le théorème de *Matignon*, cette fonction est stable si ces pôles sont négatifs :

$$s_{1,2}^\nu < 0 \Rightarrow \omega_n^\nu \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) < 0, \quad (2.6.16)$$

$$\Rightarrow -\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} < 0. \quad (2.6.17)$$

L'inégalité (2.6.17) est satisfaite seulement pour des valeurs positives de ζ , par conséquent :

$$1 \leq \zeta < +\infty. \quad (2.6.18)$$

Cas $|\zeta| < 1$:

La fonction de transfert (2.6.14) possède dans ce cas deux pôles complexes conjugués en s^ν :

$$s_{1,2}^\nu = \omega_n^\nu \left(-\zeta \pm j\sqrt{1 - \zeta^2} \right), \quad (2.6.19)$$

$$= \omega_n^\nu e^{\pm j\theta}, \quad (2.6.20)$$

avec θ limité à $]0, \pi[$, est donnée par :

$$\theta = \begin{cases} \arctan \left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{-\zeta} \right) & \text{si } -1 < \zeta \leq 0, \\ \arctan \left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{-\zeta} \right) + \pi & \text{si } 0 \leq \zeta < 1. \end{cases} \quad (2.6.21)$$

Toujours selon le théorème de *Matignon*, le système est stable ssi :

$$0 < \nu \frac{\pi}{2} < \theta < \pi. \quad (2.6.22)$$

Deux cas se distinguent

Cas $-1 < \zeta \leq 0$:

Dans ce cas,

$$0 < \nu \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta} > 0. \quad (2.6.23)$$

Par conséquent, θ est dans le premier quadrant : $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$.

$$0 < \nu \frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (2.6.24)$$

De plus, en remplaçant (2.6.21) dans (2.6.24) :

$$\tan\left(\nu \frac{\pi}{2}\right) < \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta} \leq \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \tan^2\left(\nu \frac{\pi}{2}\right) < \frac{1-\zeta^2}{\zeta^2} \leq \infty \quad (2.6.25)$$

$$\zeta^2 < \cos^2\left(\nu \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.6.26)$$

Puisque ζ est négative, la condition à satisfaire est :

$$-1 < -\cos\left(\nu \frac{\pi}{2}\right) < \zeta \leq 0. \quad (2.6.27)$$

Cas $0 \leq \zeta < 1$:

Dans ce cas,

$$1 \leq \nu < 2 \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta} < 0. \quad (2.6.28)$$

Par conséquent, θ est dans le deuxième quadrant : $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$. De plus, en se basant sur (2.6.22) :

$$\frac{\pi}{2} \leq \nu \frac{\pi}{2} < \theta < \pi. \quad (2.6.29)$$

En remplaçant (2.6.21) dans (2.6.29)

$$\tan\left(\nu \frac{\pi}{2} - \pi\right) < \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta} < \tan(0) \Leftrightarrow \tan^2\left(\nu \frac{\pi}{2}\right) > \frac{1-\zeta^2}{\zeta^2} > 0 \quad (2.6.30)$$

$$\zeta^2 > \cos^2\left(\nu \frac{\pi}{2}\right), \quad (2.6.31)$$

puisque ζ est positive, la condition à satisfaire est :

$$0 < -\cos\left(\nu \frac{\pi}{2}\right) < \zeta < 1. \quad (2.6.32)$$

La combinaison des inégalités (2.6.18), (2.6.27), et (2.6.32) conduit au corollaire suivant du théorème de *Matignon*.

Corollaire 2.6.1 (Stabilité d'une fonction de transfert non entière de deuxième espèce) La fonction de transfert (2.6.14) est stable ssi :

$$-\cos\left(\nu\frac{\pi}{2}\right) < \zeta < \infty \quad \text{et} \quad 0 < \nu < 2. \quad (2.6.33)$$

Ce corollaire est en concordance avec le cas rationnel. En effet, pour un ordre $\nu = 1$, la condition de stabilité pour une fonction de transfert rationnelle de deuxième ordre s'écrit :

$$0 < \zeta < \infty. \quad (2.6.34)$$

2.6.2.2 Résonance d'une fonction de transfert élémentaire de deuxième espèce

La réponse fréquentielle de (2.6.14) est donnée par :

$$F_2(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^\nu + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^{2\nu}}, \quad (2.6.35)$$

$$F_2(j\Omega\omega_n) = \mathcal{F}_2(j\Omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta (j\Omega)^\nu + (j\Omega)^{2\nu}}. \quad (2.6.36)$$

La fréquence normalisée $\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$ est définie comme précédemment.

Le gain de $\mathcal{F}_2(j\Omega)$ est alors donné par :

$$|\mathcal{F}_2(j\Omega)| = \frac{1}{|1 + 2\zeta e^{j\nu\frac{\pi}{2}} \Omega^\nu + e^{j\nu\pi} \Omega^{2\nu}|}, \quad (2.6.37)$$

$$= \frac{1}{|(1 + 2\zeta \cos(\nu\frac{\pi}{2}) \Omega^\nu + \cos(\nu\pi) \Omega^{2\nu}) + j(2\zeta \sin(\nu\frac{\pi}{2}) \Omega^\nu + \sin(\nu\pi) \Omega^{2\nu})|}. \quad (2.6.38)$$

Le gain en dB est donné par :

$$|\mathcal{F}_2(j\Omega)|_{\text{dB}} = -10 \log \left[\Omega^{4\nu} + 4\zeta \cos\left(\nu\frac{\pi}{2}\right) \Omega^{3\nu} + 2(2\zeta^2 + \cos(\nu\pi)) \Omega^{2\nu} + 4\zeta \cos\left(\nu\frac{\pi}{2}\right) \Omega^\nu + 1 \right]. \quad (2.6.39)$$

Dans le cas où $F_2(s)$ est résonante, $|\mathcal{F}_2(j\Omega)|_{\text{dB}}$ a au moins un maximum à la fréquence normalisée. Par conséquent, $F_2(s)$ est résonante si l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{d|\mathcal{F}_2(j\Omega)|_{\text{dB}}}{d\Omega} &= 0 \Rightarrow \\ \Omega^{4\nu-1} + 3\zeta \cos\left(\nu\frac{\pi}{2}\right) \Omega^{3\nu-1} + (2\zeta^2 + \cos(\nu\pi)) \Omega^{2\nu-1} + \zeta \cos\left(\nu\frac{\pi}{2}\right) \Omega^{\nu-1} &= 0 \end{aligned} \quad (2.6.40)$$

possède une solution réelle et strictement positive qui correspond à ce maximum. En simplifiant le facteur en commun $\Omega^{\nu-1}$ dans (2.6.40), l'équation devient :

$$\begin{aligned} \frac{d|\mathcal{F}_2(j\Omega)|_{\text{dB}}}{d\Omega} &= 0 \Rightarrow \\ \Omega^{3\nu} + 3\zeta \cos\left(\nu\frac{\pi}{2}\right) \Omega^{2\nu} + (2\zeta^2 + \cos(\nu\pi)) \Omega^\nu + \zeta \cos\left(\nu\frac{\pi}{2}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.6.41)$$

A partir de cette équation, il est possible de retrouver la condition de résonance dans le cas entier, en remplaçant ν par 1 :

$$\Omega^3 + (2\zeta^2 - 1)\Omega = 0. \quad (2.6.42)$$

La solution strictement positive est donnée par :

$$\Omega_r = \sqrt{1 - 2\zeta^2}, \quad (2.6.43)$$

d'où la condition sur le facteur d'amortissement dans le cas rationnel :

$$1 - 2\zeta^2 > 0 \Rightarrow \zeta < \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (2.6.44)$$

Les solutions de l'équation (2.6.41) de troisième ordre en Ω^ν peuvent être réelles positives, réelles négatives, ou complexes. Le système étudié peut avoir zéro, une ou deux fréquences de résonance selon le nombre de solutions réelles et strictement positives qui correspondent aux maxima de $|\mathcal{F}_2(j\Omega)|$. Certaines solutions réelles et strictement positives peuvent correspondre à des minima de $|\mathcal{F}_2(j\Omega)|$, notamment lorsque le système présente une double résonance (voir exemple 2 p.72), il possède alors un minimum entre deux maxima.

L'équation (2.6.41) peut difficilement être résolue analytiquement. Toutefois, une solution numérique est donnée par la figure 2.13. La région grise (numéro 0) présente des combinaisons de ν et ζ qui conduisent à un système résonant. Les deux régions jaune et verte (numéro 1 et 2), présentent des combinaisons de ν et ζ qui conduisent à un système résonant avec respectivement une et deux fréquences de résonance. La région rouge (numéro 3) présente des combinaisons de ν et ζ qui conduisent à un système instable.

Résumé

- si $0 < \nu \leq 0.5$ et $-\cos \nu \frac{\pi}{2} < \zeta < 0 \Rightarrow$ la fonction de transfert stable $F_2(s)$ (2.6.14) est toujours résonante,
- si $0 < \nu \leq 0.5$ et $0 \leq \zeta \Rightarrow$ la fonction de transfert stable $F_2(s)$ n'est jamais résonante (pour $\zeta = 0$ l'équation (2.6.41) n'a pas de solution strictement positive),
- si $0.5 < \nu \leq 1$ et $-\cos \nu \frac{\pi}{2} < \zeta < \zeta_0^2 \Rightarrow$ la fonction de transfert stable $F_2(s)$ est résonante,
- si $0.5 < \nu \leq 1$ et $\zeta_0 \leq \zeta < \infty \Rightarrow$ la fonction de transfert stable $F_2(s)$ n'est jamais résonante,

² ζ_0 est calculé numériquement et présenté sur la figure 2.13 comme étant le contour supérieur de la région de résonance jaune dans l'intervalle $\zeta \in]0.5, 1]$

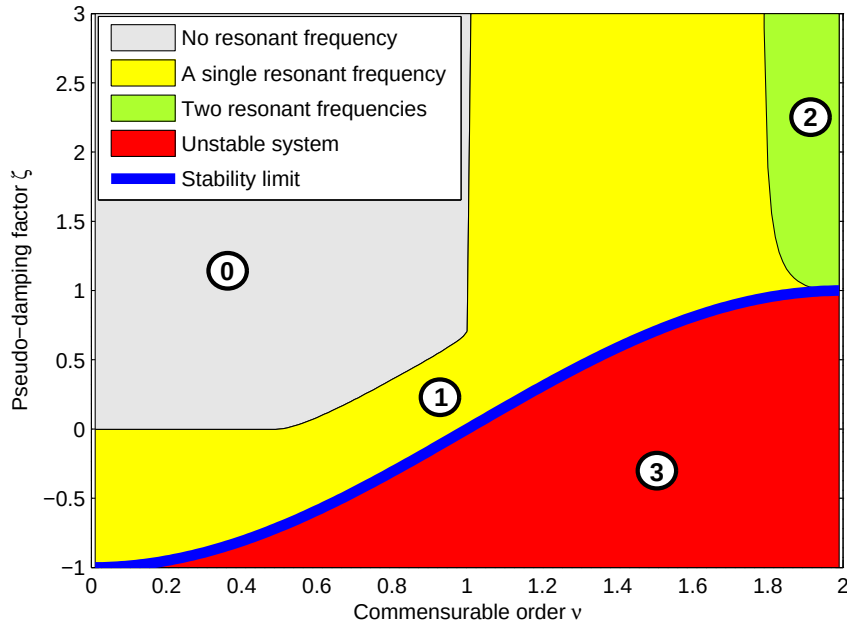


FIG. 2.13 – Régions de stabilité et de résonance du modèle non entier (2.6.14) dans le plan (ζ, ν)

- si $1 < \nu < 2$ et $-\cos \nu \frac{\pi}{2} < \zeta < \infty \Rightarrow$ la fonction de transfert $F_2(s)$ est toujours résonante,
- si $\nu_1 < \nu < 2$ et $\zeta_1 < \zeta < \infty$ ³ $\Rightarrow$ la fonction de transfert stable $F_2(s)$ possède deux fréquences de résonance.

Comme le montre la figure 2.13, si la fonction de transfert non entière est résonante, elle pourrait avoir une ou deux fréquences de résonance normalisées selon les combinaisons de ν et ζ .

Trois abaques sont tracés pour chaque fréquence de résonance normalisée. Il est désormais possible de déterminer le pseudo-facteur d'amortissement et l'ordre non entier pour :

- une première fréquence de résonance à partir de la figure 2.14(a),
- un gain normalisé à la première fréquence de résonance à partir de la figure 2.14(b),
- une phase à la première fréquence de résonance à partir de la figure. 2.14(c),
- une deuxième fréquence de résonance si elle existe, à partir de la figure. 2.14(d),
- un gain normalisé à la deuxième fréquence, si elle existe, à partir de la figure. 2.14(e),
- une phase à la deuxième fréquence de résonance, si elle existe, à partir de la figure.

³ ν_1 et ζ_1 sont calculés numériquement et tracés sur la figure 2.13 comme étant le contour inférieur à gauche de la partie supérieure à droite de la région verte

2.14(f).

2.6.2.3 Analyse de la fonction de transfert en boucle ouverte équivalente

La fonction de transfert élémentaire $F_2(s)$ (2.6.14) peut être représentée par deux boucles fermées imbriquées comme sur la figure 2.15, avec deux gains et deux intégrateurs d'ordre non entier ν ,

$$K_1 = \frac{\omega_n^\nu}{2\zeta}, \quad (2.6.45)$$

$$K_2 = 2\zeta\omega_n^\nu. \quad (2.6.46)$$

Il est aussi possible de représenter $F_2(s)$ par une seule boucle fermée comme indiqué sur la figure 2.16, avec

$$F_2(s) = \frac{\beta(s)}{1 + \beta(s)}. \quad (2.6.47)$$

La fonction de transfert en boucle ouverte $\beta(s)$ est donnée par :

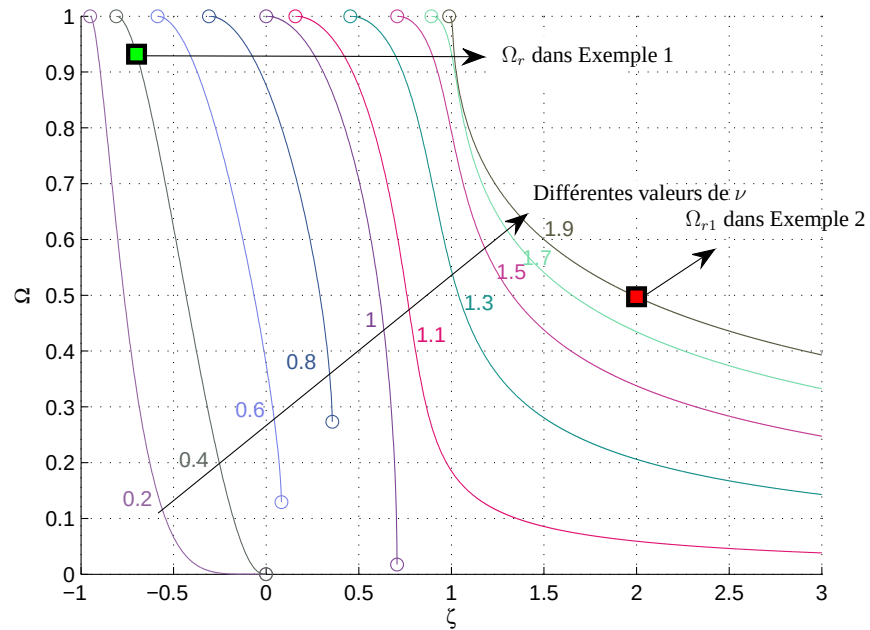
$$\beta(s) = \frac{K_1 K_2}{s^{2\nu}(1 + \frac{K_2}{s^\nu})}. \quad (2.6.48)$$

L'étude de la fonction de transfert en boucle ouverte $\beta(s)$ est faite pour des valeurs différentes de ν et ζ . Les réponses fréquentielles sont tracées sur les diagrammes de *Nichols* pour $\zeta = -0.7$, $\zeta = +0.7$ et $\zeta = 2$ sur les figures 2.17, 2.18(a) et 2.18(b).

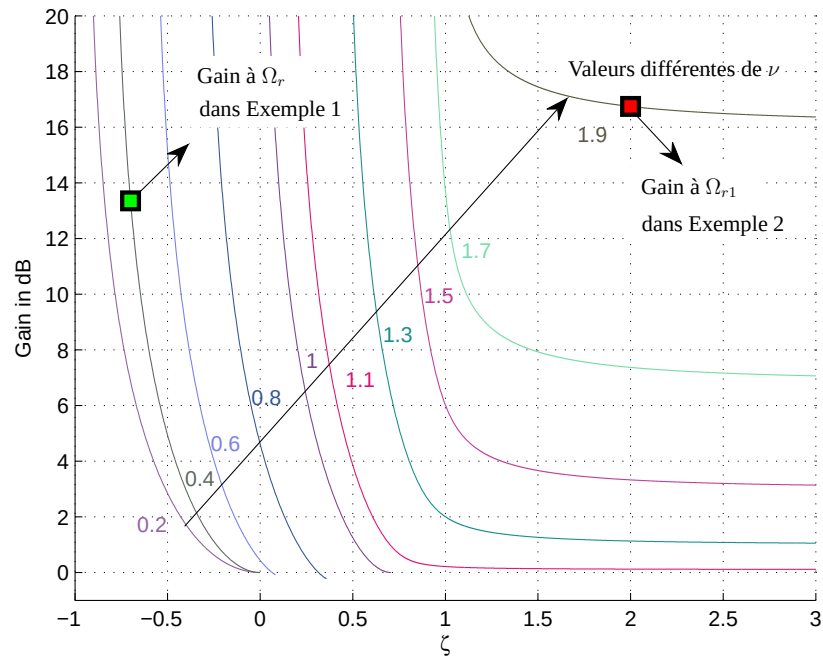
Pour un ζ négatif (figure 2.17 avec $\zeta = -0.7$), le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte $\beta(s)$ est négatif. Cependant, aux basses fréquences, le diagramme de *Nichols* de $\beta(s)$ est à l'intérieur des contours d'amplitude de 0 dB. Si la condition de stabilité (2.6.33) est satisfaite (dans ce cas $\nu > \arccos(0.7)\frac{2}{\pi} = 0.51$), $\beta(s)$ est à la droite du point critique. A contrario $\beta(s)$ peut être à gauche du point critique.

Pour $0 < \zeta \leq 1$ (figure 2.18(a) avec $\zeta = +0.7$), le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte $\beta(s)$ est positif. Dans le cas où $\nu < \nu_0$ (dans cette exemple $\nu_0 \approx 1$), le diagramme de *Nichols* est à l'extérieur du contour de 0 dB. Pour $\nu_0 < \nu < 2$, le diagramme de *Nichols* est à l'intérieur du contour de 0 dB ce qui conduit à un système résonant en boucle fermée. De plus, le système est stable si la condition (2.6.33) est satisfaite, en l'occurrence $\nu > \arccos(-0.7)\frac{2}{\pi} = 1.50$.

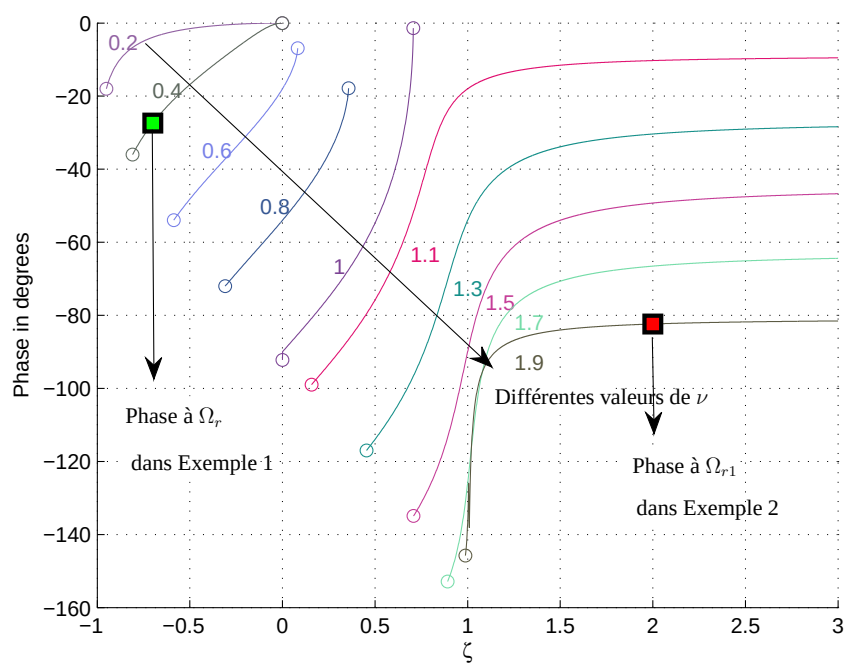
Pour $\zeta > 1$ (figure 2.18(b) avec $\zeta = 2$), le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte $\beta(s)$ est positif. Si $\nu \leq 1$, le diagramme de *Nichols* est à l'extérieure du contour de 0



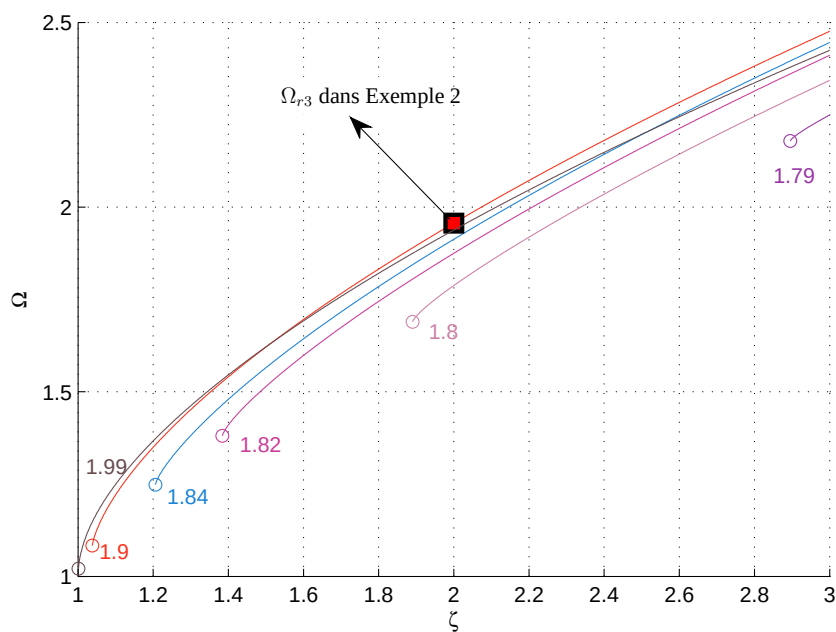
(a) Abaque – Première fréquence de résonance normalisée en fonction de ζ , pour différentes valeurs de ν



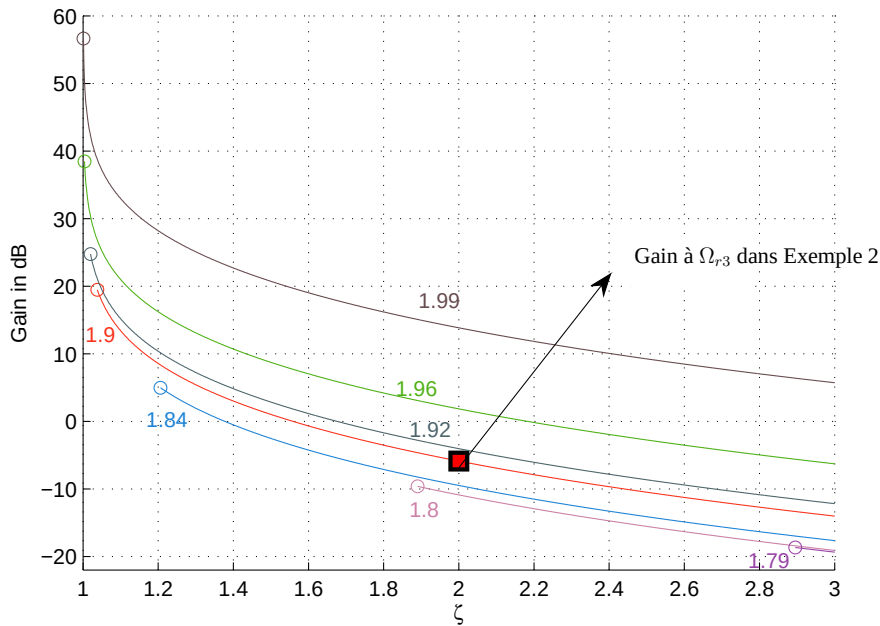
(b) Abaque – Gain à la première fréquence de résonance normalisée en fonction de ζ , pour différentes valeurs de ν



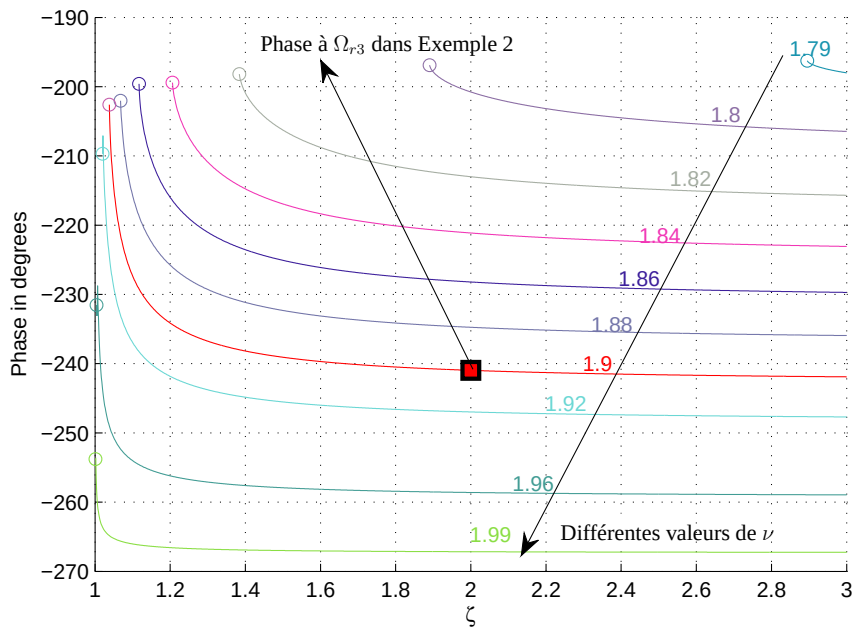
(c) Abaque – Phase à la première fréquence de résonance normalisée en fonction de ζ , pour différentes valeurs de ν



(d) Abaque – Deuxième fréquence de résonance normalisée en fonction de ζ , pour les différentes valeurs de ν



(e) Abaque – Gain à la deuxième fréquence de résonance normalisée en fonction de ζ , pour les différentes valeurs de ν



(f) Abaque – Phase à la deuxième fréquence de résonance normalisée en fonction de ζ , pour les différentes valeurs de ν

FIG. 2.14 – Abaques permettant de déduire les paramètres des fonctions de transfert de deuxième espèce

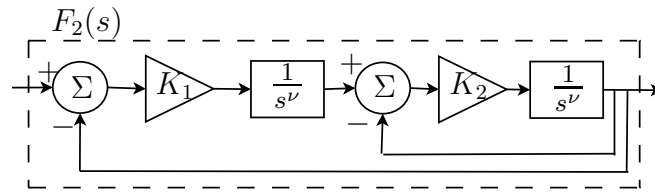


FIG. 2.15 – Schéma fonctionnel pour les deux boucles fermées équivalentes

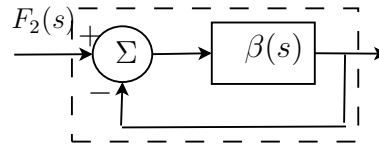


FIG. 2.16 – Schéma fonctionnel de la boucle fermée équivalente

dB. Pour $1 < \nu < 2$, le diagramme de *Nichols* est à l'intérieur du contour de 0 dB ce qui conduit à un système résonant en boucle fermée. Pour un cas particulier ($\nu = 1.9$), le diagramme de *Nichols* tangente le contour de -5.9 dB ce qui conduit à une réponse fréquentielle en boucle fermée avec une double résonance (voir exemple 2 p.72). Le système est instable si $\nu \geq 2$ selon le théorème de *Matignon étendu*.

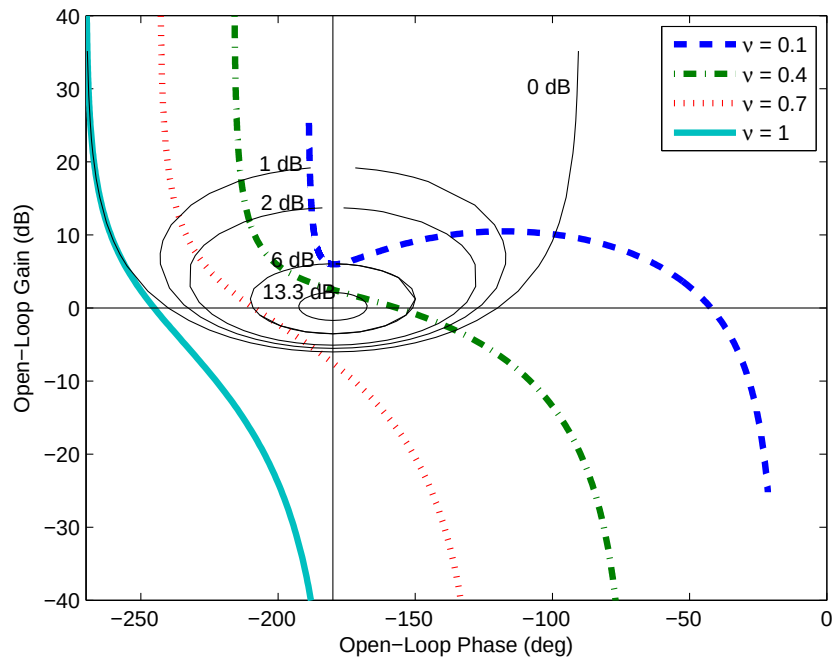
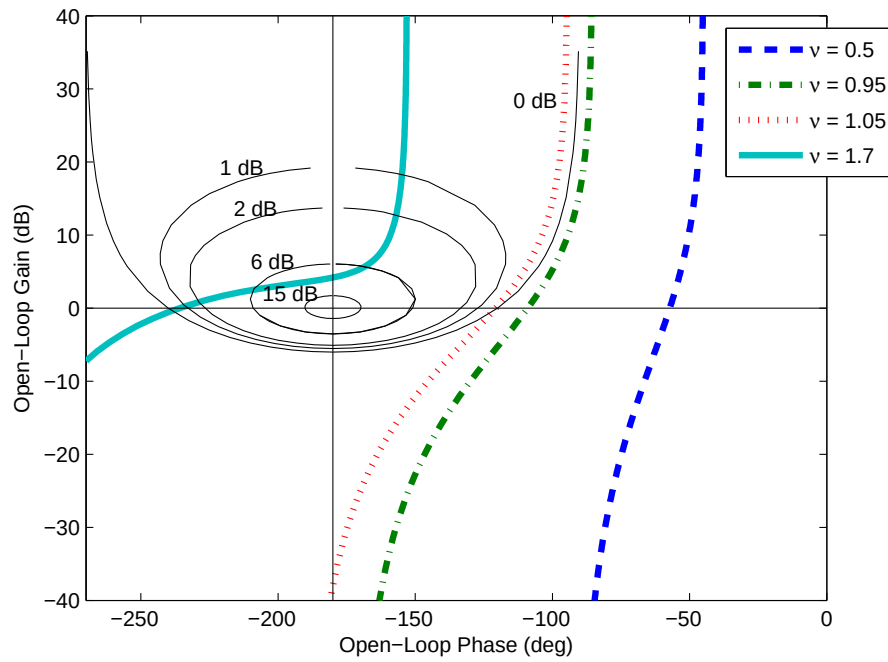
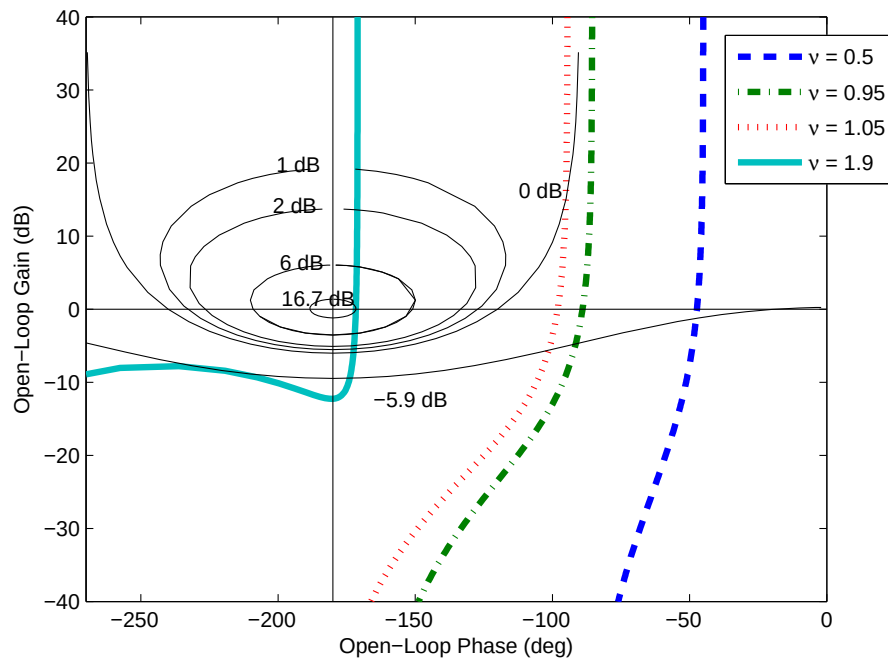


FIG. 2.17 – Diagramme de *Nichols* pour $\zeta = -0.7$ et des différentes valeurs de ν



(a) Diagramme de *Nichols* pour $\zeta = +0.7$ et des différentes valeurs de ν



(b) Diagramme de *Nichols* pour $\zeta = 2$ et des différentes valeurs de ν

FIG. 2.18 – Diagrammes de *Nichols*

Exemple 2.6.2 L'exemple 1 montre comment utiliser les abaque pour trouver la fonction de transfert de deuxième espèce à partir de caractéristiques fréquentielles imposées. L'exemple 2 illustre une fonction de transfert non entière de deuxième espèce ayant deux fréquences de résonance.

Exemple 1

Déterminons la fonction de transfert résonante de deuxième espèce ayant un ordre non entier de $\nu = 0.4$, un gain normalisé $\left| \frac{F_2(j\omega_r)}{F_2(j0)} \right|_{dB} = 13.3 \text{ dB}$, une fréquence de résonance à $\omega_r = 10^3 \text{ rad/s}$ et un gain statique de 0 dB . Ainsi, à partir de l'abaque de la figure 2.14(b), le facteur de pseudo-amortissement est fixé à $\zeta = -0.7$. Ensuite, à partir de l'abaque de la figure 2.14(a) la fréquence normalisée est déduite $\Omega_r = \frac{\omega_r}{\omega_n} = 0.93 \text{ rad/s}$. Par conséquent, la fréquence naturelle ω_n est égale à 1075 rad/s . La fonction de transfert obtenue correspond à :

$$F_2(s) = \frac{1}{1 - 2 \times 0.7 \left(\frac{s}{1075} \right)^{0.4} + \left(\frac{s}{1075} \right)^{0.8}}. \quad (2.6.49)$$

De plus, en utilisant l'abaque de la figure 2.14(c), il est possible de déduire la phase à la fréquence de résonance qui est égale à -27° .

Dans cet exemple l'équation (2.6.41) s'écrit :

$$\Omega^{1.2} - 1.70\Omega^{0.8} + 1.30\Omega^{0.4} - 0.57 = 0. \quad (2.6.50)$$

La solution réelle et strictement positive de (2.6.50) permet d'obtenir la fréquence de résonance :

$$\Omega_r = 0.93. \quad (2.6.51)$$

Les réponses impulsionnelle et indicielle sont sous-amorties, cela est dû à la fréquence de résonance comme illustré sur la figure 2.20.

Exemple 2

Considérons maintenant la combinaison $\nu = 1.9$, et $\zeta = 2$, située dans la région verte de la figure 2.13. La fonction de transfert (2.6.14) présente alors une double résonance. En l'occurrence, l'équation (2.6.41) qui se réduit à :

$$\Omega^{5.7} - 5.93\Omega^{3.8} + 8.95\Omega^{1.9} - 1.98 = 0, \quad (2.6.52)$$

possède trois solutions réelles positives :

$$\Omega_{r1} = 0.50, \Omega_{r2} = 1.47, \Omega_{r3} = 1.96. \quad (2.6.53)$$

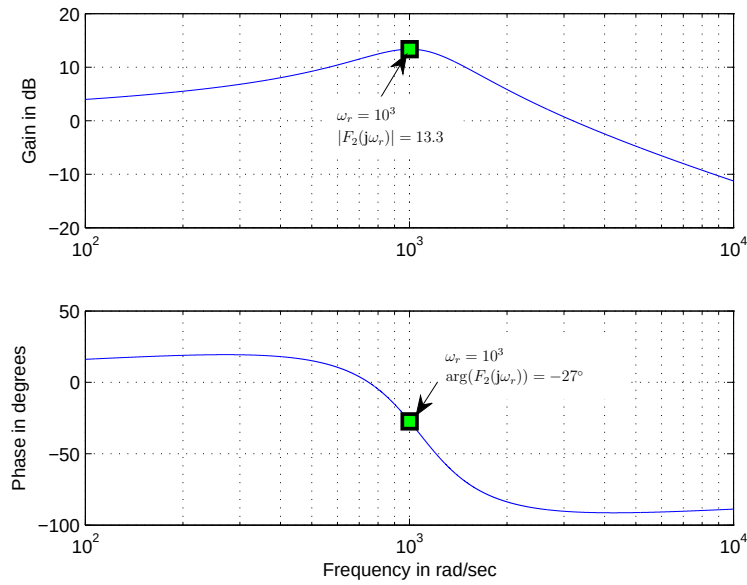


FIG. 2.19 – Diagramme de *Bode* pour $\zeta = -0.7$ et $\nu = 0.4$

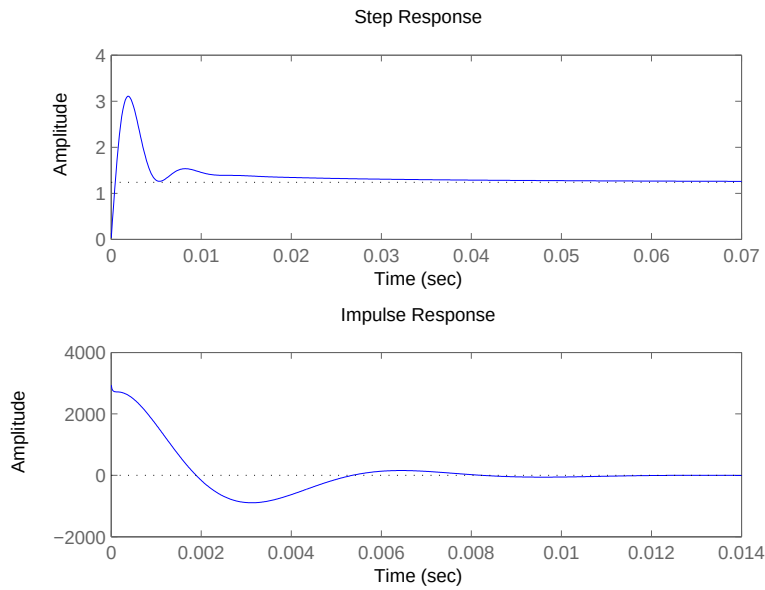


FIG. 2.20 – Réponses impulsionnelle et indicielle pour $\zeta = -0.7$ et $\nu = 0.4$

Comme le montre la figure 2.21, Ω_{r1} et Ω_{r3} correspondent à deux résonances et Ω_{r2} correspond à un minimum. Quand le système présente deux fréquences de résonance, il existe toujours un minimum entre les deux maxima. Les fréquences Ω_{r1} et Ω_{r3} sont indiquées sur les abaques des figures 2.14(a) et 2.14(d). Les amplitudes aux deux fréquences de résonance sont égales à

16.7 et -5.9 dB respectivement, comme le montrent les abaques des figures 2.14(b) et 2.14(e) ainsi que les contours d'amplitude de la figure 2.18(b) pour $\nu = 1.9$. Les phases aux deux fréquences de résonance sont égales à -86° et -240° respectivement, ce qui est en concordance avec les abaques des figures 2.14(c) et 2.14(f). De plus, les réponses impulsionnelle et indicielle sont sous-amorties, cela est dû aux résonances comme illustré sur la figure 2.22.

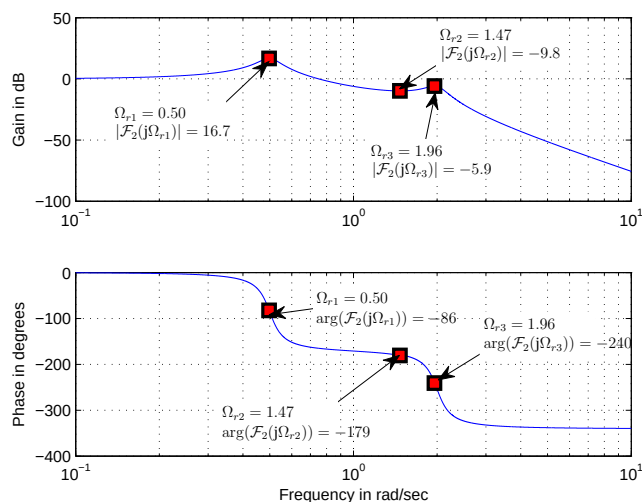


FIG. 2.21 – Diagramme de Bode pour $\zeta = 2$ et $\nu = 1.9$

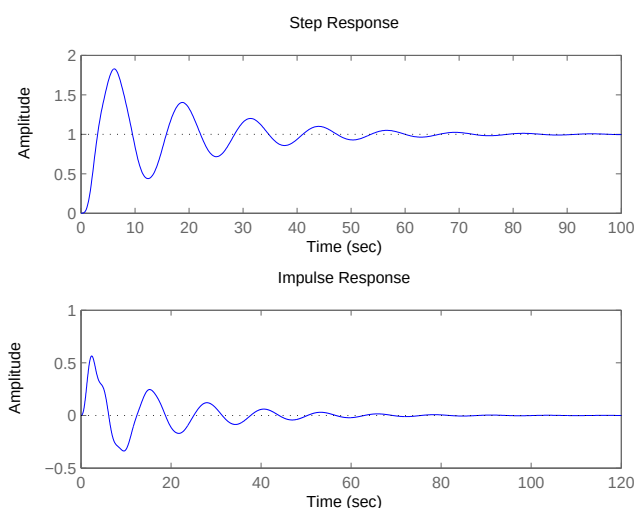


FIG. 2.22 – Réponses impulsionnelle et indicielle pour $\zeta = 2$ et $\nu = 1.9$

2.6.3 Extension de fonction de transfert élémentaire de première espèce à des ordres de dérivation sous forme d'intervalle

La forme canonique d'une fonction de transfert élémentaire de première espèce ayant un ordre de dérivation sous la forme d'un intervalle est donnée par :

$$F_1(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^{[\nu]} + 1}, \quad (2.6.54)$$

La condition de stabilité est toujours obtenue à partir du théorème de *Matignon étendu* :

$$[\nu] \subset]0, 2[. \quad (2.6.55)$$

La réponse fréquentielle de (2.6.54) est donnée par :

$$F_1(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{e^{j\frac{\pi}{2}}\omega}{\omega_n}\right)^{[\nu]} + 1}. \quad (2.6.56)$$

L'occurrence unique de ν permet l'utilisation de la notation de variable intervalle pour exprimer les conditions de résonance et de stabilité des fonctions de transfert de première espèce ayant un ordre de dérivation sous forme d'intervalle.

– la condition de résonance :

$$[\nu] \cap]1, 2[\neq \emptyset, \quad (2.6.57)$$

– la fréquence de résonance :

$$\Omega_r^{[\nu]} = -\cos\left([\nu]\frac{\pi}{2}\right), \quad (2.6.58)$$

– le gain à la fréquence de résonance :

$$|\mathcal{F}_1(j\Omega_r)|_{\text{dB}} = -20 \log\left(\sin\left([\nu]\frac{\pi}{2}\right)\right), \quad (2.6.59)$$

– la phase à la fréquence de résonance :

$$\arg(\mathcal{F}_1(j\Omega_r)) = (1 - [\nu])\frac{\pi}{2}. \quad (2.6.60)$$

Exemple 2.6.3 Soit la fonction de transfert élémentaire de première espèce sous forme d'intervalle :

$$F_1(s) = \frac{1}{s^{[1.70, 1.75]} + 1}. \quad (2.6.61)$$

La condition de résonance présentée dans (2.6.57) est satisfaite dans cet exemple avec $[\nu] = [1.70, 1.75]$. La fréquence de résonance normalisée $\Omega_r = [0.89, 0.92]$. Selon (2.6.59) et (2.6.60), le gain et la phase à la fréquence de résonance sont donnés par :

$$\left| \frac{F_1(j\Omega_r)}{F_1(j0)} \right|_{dB} = [6.85, 8.34], \quad (2.6.62)$$

et

$$\arg(F_1(j\Omega_r)) = [-67.5, -63]. \quad (2.6.63)$$

La figure 2.23 présente les diagrammes de Bode de ce système.

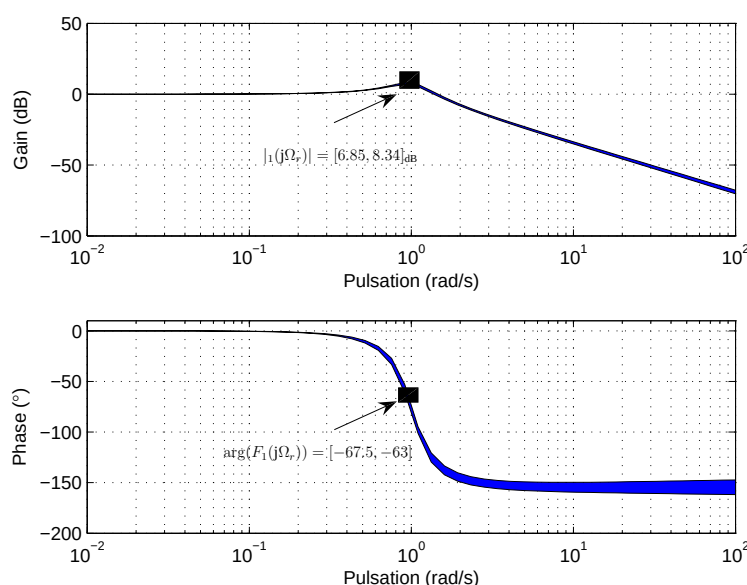


FIG. 2.23 – Diagramme de Bode de $F_1(s) = \frac{1}{s^{[1.7, 1.75]} + 1}$

2.6.4 Extension de fonction de transfert élémentaire de deuxième espèce à des ordres de dérivation sous forme d'intervalle

La forme canonique d'une fonction de transfert élémentaire de deuxième espèce sous forme d'intervalle est donnée par :

$$F_2(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^\nu + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^{2\nu}}, \quad \nu \in [\nu], \quad (2.6.64)$$

La condition de stabilité est basée sur le corollaire présenté en 2.6.1. Ainsi, la fonction (2.6.64) est stable si :

$$-\cos\left(\nu \frac{\pi}{2}\right) < \zeta < \infty \quad \text{et} \quad 0 < \nu < 2, \quad \nu \in [\nu]. \quad (2.6.65)$$

Par conséquent, les conditions de résonance présentées précédemment sont généralisées au cas non entier sous forme d'intervalle avec $\nu \in [\nu]$.

Exemple 2.6.4 Soit la fonction de transfert élémentaire de deuxième espèce sous forme d'intervalle :

$$F_2(s) = \frac{1}{1 - 2 \times 0.5 (s)^{[0.4, 0.5]} + (s)^{2 \times [0.4, 0.5]}}. \quad (2.6.66)$$

La condition de résonance est satisfaite dans cet exemple avec $[\nu] = [0.4, 0.45]$ et $\zeta = -0.5$. Le gain et la phase à la fréquence de résonance sont donnés par :

$$\left| \frac{F_2(j\Omega_r)}{F_2(j0)} \right|_{dB} = [4.5, 8.5], \quad (2.6.67)$$

et

$$\arg(F_2(j\Omega_r)) = [-30, -22]. \quad (2.6.68)$$

La figure 2.24 présente les diagrammes de Bode du gain et de la phase de ce système.

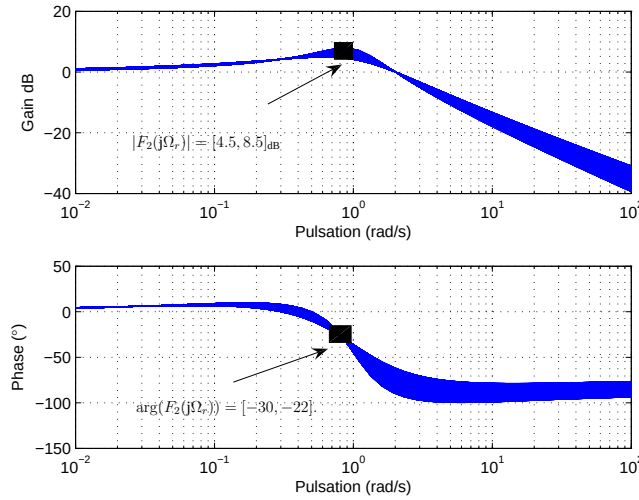


FIG. 2.24 – Diagramme de Bode de $F_2(s) = \frac{1}{1 - 2 \times 0.5 (s)^{[0.4, 0.5]} + (s)^{2 \times [0.4, 0.5]}}$

2.7 Conclusion

Ce chapitre présente les principaux outils pour la modélisation de systèmes à dérivées non entières puis par intervalles. Après avoir rappelé les définitions devenues usuelles de l'intégration et de la dérivation non entière, une première contribution à ce chapitre a consisté à étendre ces définitions à des intervalles. L'étude du comportement fréquentiel des intégrateur et

dérivateur par intervalle s'en est suivi. L'analyse du comportement temporel a montré, à travers un exemple, que la monotonie de la réponse temporelle par rapport à l'ordre de dérivation n'est pas simple à étudier et fait appel à des fonctions non usuelles.

Lors d'une modélisation de systèmes à partir de données fréquentielles, il est important de connaître les caractéristiques de fonctions de transfert élémentaires notamment en terme de résonance. Une second contribution présentée dans ce chapitre est l'étude des conditions de résonance des fonctions de transfert élémentaires de première et de deuxième espèce. Des abaques ont également été proposés permettant de déduire les paramètres d'une fonction de transfert élémentaire de deuxième espèce à partir d'une amplitude de résonance et d'une fréquence souhaitées. Cette étude à fait l'objet d'une publication dans la revue *Automatica* [?].

Chapitre 3

Estimation des paramètres d'un modèle non entier par approches ensemblistes à partir de données fréquentielles

Sommaire

3.1	Introduction	81
3.2	Estimation ensembliste des paramètres d'un modèle non entier dans le cas général	82
3.2.1	Estimation ensembliste par la représentation rectangulaire	83
3.2.2	Estimation ensembliste par la représentation polaire	84
3.2.3	Estimation ensembliste par la représentation circulaire	85
3.2.4	Mise en place des algorithmes pour l'estimation garantie	86
3.3	Exemple d'estimation ensembliste des paramètres d'un modèle de première espèce	91
3.3.1	Estimation ensembliste par la représentation rectangulaire	94
3.3.2	Estimation ensembliste par la représentation polaire	98
3.3.3	Estimation ensembliste par la représentation circulaire	102
3.3.4	Fusion de l'ensemble des solutions	103
3.4	Exemple d'estimation ensembliste des paramètres d'un modèle de deuxième espèce	104
3.4.1	Estimation ensembliste par la représentation rectangulaire	107
3.4.2	Estimation ensembliste par la représentation polaire	112
3.4.3	Estimation ensembliste par la représentation circulaire	115
3.4.4	Fusion de l'ensemble des solutions	117

3.5	Application à l'estimation ensembliste des paramètres d'un système de diffusion thermique dans un barreau d'aluminium	118
3.5.1	Description du banc d'essai	119
3.5.2	Identification du barreau thermique	120
3.6	Conclusion	126

3.1 Introduction

L'identification fréquentielle de systèmes est largement répandue dans les sciences pour l'ingénieur, notamment en automatique que ça soit pour la commande, la simulation ou le diagnostic.

Les techniques d'identification dans le domaine fréquentiel par modèle entier datent de la deuxième moitié du 20e siècle, quand *Levy* [?] a proposé une solution au problème de "fit-tag" (adaptation d'un modèle à un jeu de données fréquentielles), en minimisant la norme ℓ_2 de l'erreur d'équation qui conduit à la solution des moindres carrés. Toutefois, la technique proposée par *Levy* est biaisée car la norme ℓ_2 de l'erreur d'équation favorise l'estimation aux hautes fréquences. *Sanathanan* et al. [?] s'affranchissent du problème du biais par une approche itérative qui minimise la norme ℓ_2 de l'erreur d'équation filtrée, le filtre étant calculé itérativement. En 1991, *Spanos* [?] a proposé la minimisation de la norme ℓ_∞ de l'erreur de sortie du critère d'erreur dont l'avantage est de ne favoriser aucune fréquence. *Hakvoort* [?] a développé une technique d'estimation basée sur la minimisation de la norme ℓ_∞ pondérée. Les différentes méthodes d'identification fréquentielle par modèle entier ont fait l'objet d'une étude comparative dans [?].

Les travaux sur l'identification fréquentielle ont été étendus aux modèles non entiers dans les années 1990. Les techniques proposées dans [?], [?], résultent d'une combinaison des approches de *Levy* [?] et *Hakvoort* [?] appliquées à des modèles non entiers. La norme ℓ_∞ de l'erreur de sortie y est minimisée dans le domaine fréquentiel. Une extension des algorithmes de *Levy* aux modèles non entiers a aussi été proposée dans [?].

Ce chapitre traite des méthodes d'estimation ensemblistes de paramètres de fonctions de transfert non entières à partir des données fréquentielles incertaines et bornées. L'objectif est de caractériser l'ensemble de paramètres (coefficients et ordres de dérivation) de modèles non entiers jugés faisables. Par conséquent, le résultat de l'estimation est un ensemble de modèles, et non pas un modèle unique, dont les paramètres y compris les ordres de dérivation s'écrivent sous la forme d'intervalles. A cet effet, les représentations rectangulaire, polaire et circulaire présentées au chapitre 1 sont utilisées. Chaque fonction d'inclusion introduisant du pessimisme différemment, la fusion des résultats issus de ces représentations permet d'obtenir un ensemble de solutions plus petit. Ces méthodes peuvent s'appliquer pour l'estimation des paramètres de systèmes linéaires invariants dans le temps (LTI) certains, systèmes LTI incertains, et systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps (LPV).

Ce chapitre est structuré de la façon suivante. Le paragraphe 3.2 présente l'estimation ensembliste des paramètres d'un modèle non entier dans le cas général en utilisant les différentes

représentations des fonctions d'inclusion. Des exemples sur un modèle de première espèce, puis sur un modèle de deuxième espèce sont représentés aux paragraphes 3.4 et 3.5. Enfin, une application à l'estimation ensembliste des paramètres d'un système de diffusion thermique dans un barreau d'aluminium est présentée au paragraphe 3.5. A cet effet, les réponses fréquentielles du système, ainsi que les incertitudes à plus ou moins trois écarts-types, sont d'abord estimées par une identification non paramétrique. L'estimation ensembliste est ensuite appliquée pour obtenir l'ensemble de solutions.

3.2 Estimation ensembliste des paramètres d'un modèle non entier dans le cas général

L'objectif est l'estimation garantie de paramètres de modèles non entiers de type :

$$G(s, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\sum_{j=0}^M b_j s^{\beta_j}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i s^{\alpha_i}}, \quad (3.2.1)$$

avec $\boldsymbol{\theta} = [b_0 \dots b_M, a_1 \dots a_N, \beta_0 \dots \beta_M, \alpha_1 \dots \alpha_N]$. Le nombre de paramètres du modèle $G(s)$ est égale à $2(N + M + 1)$, constitué de $(N + M + 1)$ coefficients et autant d'ordre de dérivation. Dans la mesure où les algorithmes d'inversion ensembliste ont une complexité algorithmique exponentielle, par rapport au nombre de paramètres n_θ à estimer, de l'ordre de :

$$\left(\frac{w(\Theta)}{\eta} + 1 \right)^{n_\theta}, \quad (3.2.2)$$

pour l'algorithme SIVIA par exemple, une façon de réduire le nombre de paramètres consiste à considérer un modèle commensurable :

$$G(s, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\sum_{j=0}^M b_j s^{j\nu}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i s^{i\nu}}, \quad (3.2.3)$$

avec $\boldsymbol{\theta} = [b_0 \dots b_M, a_1 \dots a_N, \nu]$, ayant $N + M + 2$ paramètres, constituer de $(N + M + 1)$ coefficients et un seul ordre commensurable. Ce nombre doit toutefois rester bas en égard à la complexité algorithmique (3.2.2). C'est pourquoi les exemples traités aux paragraphes 3.3 et 3.4 sont de faible dimension.

La réponse fréquentielle du modèle non entier (3.2.3) est obtenue en remplaçant s par $j\omega$, soit :

$$G(j\omega, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\sum_{j=0}^M b_j(j\omega)^{j\nu}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i(j\omega)^{i\nu}}. \quad (3.2.4)$$

Tout au long de ce paragraphe, les données fréquentielles sont supposées provenir de plusieurs expériences. Ainsi à chaque fréquence ω_n correspond un ensemble de données $\mathbb{G}_n$.

Pour l'estimation garantie des paramètres, les trois représentations des nombres complexes introduits au chapitre 1, à savoir les représentations rectangulaire, polaire et circulaire sont utilisées en faisant appel à leur fonction d'inclusion respective pour la représentation de l'ensemble de données $\mathbb{G}_n$.

3.2.1 Estimation ensembliste par la représentation rectangulaire

Les ensembles $\mathbb{G}_n$ des données fréquentielles, sont englobés dans des fonctions d'inclusion rectangulaires $\mathbb{G}_n^r$ (figure 3.1). Chaque ensemble $\mathbb{G}_n$ est constitué de I point z_i , $i \in \{1, 2, \dots, I\}$.

La fonction d'inclusion rectangulaire $\mathbb{G}_n^r$ est définie par :

$$\mathbb{G}_n^r = [\underline{\Re}(\mathbb{G}_n^r) \quad \overline{\Re}(\mathbb{G}_n^r)] + j[\underline{\Im}(\mathbb{G}_n^r) \quad \overline{\Im}(\mathbb{G}_n^r)], \quad (3.2.5)$$

avec

$$\begin{cases} \underline{\Re}(\mathbb{G}_n^r) = \min_{i=1\dots I} (\Re(z_1), \Re(z_2), \dots, \Re(z_I)), \forall z_i \in \mathbb{G}_n, \\ \overline{\Re}(\mathbb{G}_n^r) = \max_{i=1\dots I} (\Re(z_1), \Re(z_2), \dots, \Re(z_I)), \forall z_i \in \mathbb{G}_n, \\ \underline{\Im}(\mathbb{G}_n^r) = \min_{i=1\dots I} (\Im(z_1), \Im(z_2), \dots, \Im(z_I)), \forall z_i \in \mathbb{G}_n, \\ \overline{\Im}(\mathbb{G}_n^r) = \max_{i=1\dots I} (\Im(z_1), \Im(z_2), \dots, \Im(z_I)), \forall z_i \in \mathbb{G}_n. \end{cases}$$

Le problème d'estimation ensembliste est donc formulé comme un problème de satisfaction de contrainte (CSP) :

$$CSP: \begin{cases} \underline{\Re}(\mathbb{G}_n^r) \leq \Re(G(j\omega_n, \boldsymbol{\theta})) \leq \overline{\Re}(\mathbb{G}_n^r), \\ \underline{\Im}(\mathbb{G}_n^r) \leq \Im(G(j\omega_n, \boldsymbol{\theta})) \leq \overline{\Im}(\mathbb{G}_n^r), \\ \boldsymbol{\theta} \in \Theta, \end{cases} \quad (3.2.6)$$

avec $\Re(G(j\omega_n, \boldsymbol{\theta}))$ et $\Im(G(j\omega_n, \boldsymbol{\theta}))$, la partie réelle et la partie imaginaire de la réponse fréquentielle (3.2.4) pour la fréquence ω_n , et Θ l'ensemble de recherche.

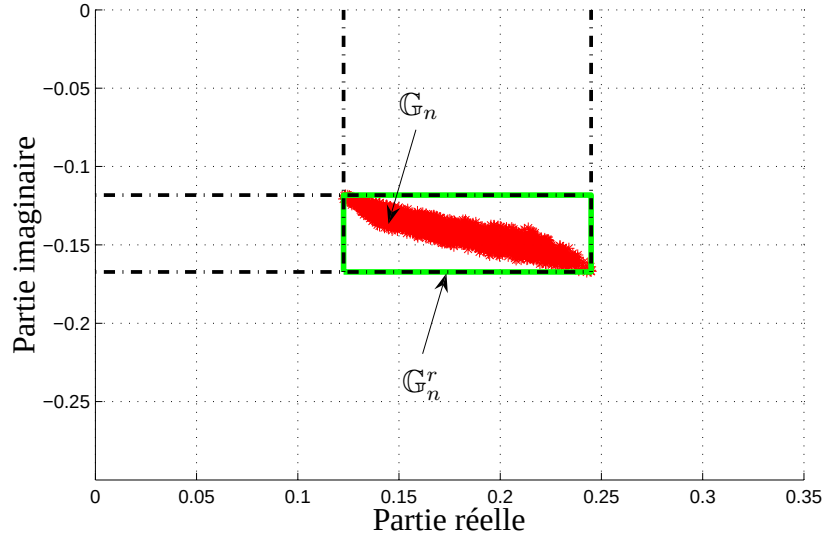


FIG. 3.1 – Fonction d'inclusion rectangulaire $\mathbb{G}_n^r$ pour un ensemble de données fréquentielles $\mathbb{G}_n$

Le vecteur de paramètres θ du modèle (3.2.3) est jugé faisable si le modèle évalué avec θ est consistant avec les fonctions d'inclusion $\mathbb{G}_n^r$ pour chaque fréquence ω_n .

3.2.2 Estimation ensembliste par la représentation polaire

Les ensembles $\mathbb{G}_n$ des données fréquentielles sont englobés dans des fonctions d'inclusion polaires $\mathbb{G}_n^p$ (figure 3.2). Chaque ensemble $\mathbb{G}_n$ est constitué de I point $z_i, i \in \{1, 2, \dots, I\}$.

La fonction d'inclusion polaire $\mathbb{G}_n^p$ est définie par :

$$\mathbb{G}_n^p = [\underline{G}_n \quad \overline{G}_n] \exp\{j [\underline{\varphi}_n \quad \overline{\varphi}_n]\}, \quad (3.2.7)$$

avec

$$\begin{cases} \underline{\varphi}_n &= \min_{i=1 \dots I} (\arg(z_1), \arg(z_2), \dots, \arg(z_I)), \forall z_i \in \mathbb{G}_n, \\ \overline{\varphi}_n &= \max_{i=1 \dots I} (\arg(z_1), \arg(z_2), \dots, \arg(z_I)), \forall z_i \in \mathbb{G}_n, \\ \underline{G}_n &= \min_{i=1 \dots I} (|z_1|, |z_2|, \dots, |z_I|), \forall z_i \in \mathbb{G}_n, \forall z_i \in \mathbb{G}_n, \\ \overline{G}_n &= \max_{i=1 \dots I} (|z_1|, |z_2|, \dots, |z_I|), \forall z_i \in \mathbb{G}_n. \end{cases}$$

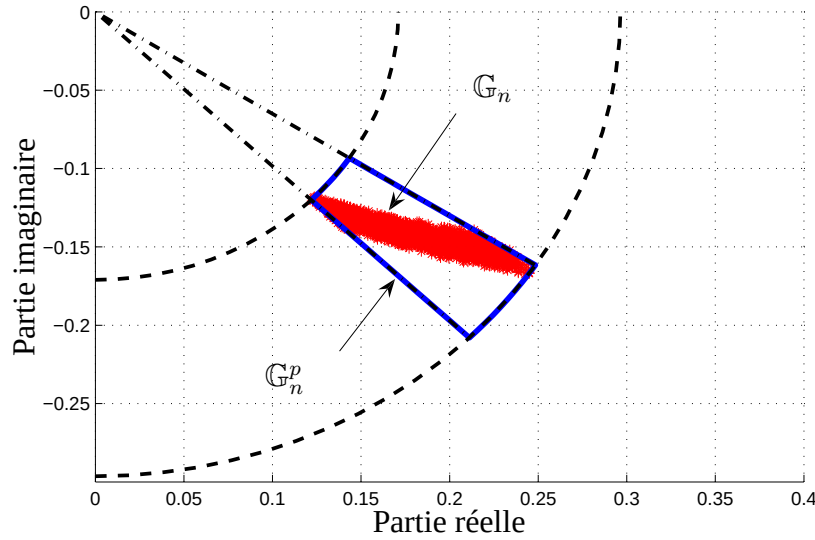


FIG. 3.2 – Fonction d'inclusion polaire $\mathbb{G}_n^p$ pour un ensemble de données fréquentielles $\mathbb{G}_n$

Le problème d'estimation ensembliste est donc formulé par le CSP :

$$\text{CSP} : \begin{cases} \underline{G}_n \leq |G(j\omega_n, \boldsymbol{\theta})| \leq \overline{G}_n, \\ \underline{\varphi}_n \leq \varphi(\omega_n, \boldsymbol{\theta}) \leq \overline{\varphi}_n, \\ \boldsymbol{\theta} \in \Theta, \end{cases} \quad (3.2.8)$$

avec $|G(j\omega_n, \boldsymbol{\theta})|$ et $\varphi(\omega_n, \boldsymbol{\theta})$, le gain et la phase de la réponse fréquentielle (3.2.4) pour la fréquence ω_n et Θ l'ensemble de recherche.

Le vecteur de paramètres $\boldsymbol{\theta}$ du modèle (3.2.3) est jugé faisable si le modèle évalué avec $\boldsymbol{\theta}$ est consistant avec les fonctions d'inclusion $\mathbb{G}_n^p$ pour chaque fréquence ω_n .

3.2.3 Estimation ensembliste par la représentation circulaire

Les ensembles $\mathbb{G}_n$ des données fréquentielles, sont englobés dans des fonctions d'inclusion rectangulaires $\mathbb{G}_n^d$ (figure 3.3). Chaque ensemble $\mathbb{G}_n$ est constitué de I point z_i , $i \in \{1, 2 \dots I\}$.

La fonction d'inclusion circulaire $\mathbb{G}_n^d$ est définie par :

$$\mathbb{G}_n^d = \{c(\mathbb{G}_n), r(\mathbb{G}_n)\}, \quad (3.2.9)$$

avec $c(\mathbb{G}_n)$ le centre de la fonction d'inclusion et $r(\mathbb{G}_n)$ son rayon.

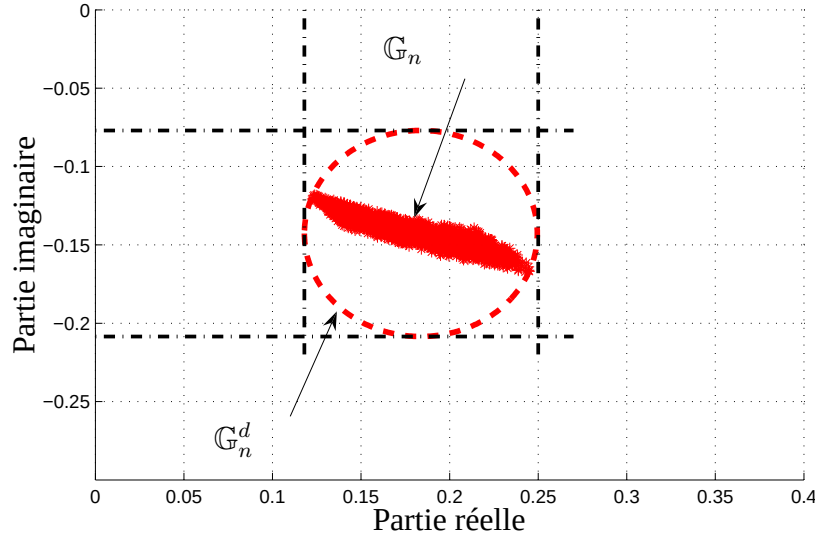


FIG. 3.3 – Fonction d'inclusion circulaire $\mathbb{G}_n^d$ pour un ensemble de données fréquentielles $\mathbb{G}_n$

Le problème d'estimation ensembliste est donc formulé par le CSP :

$$\text{CSP} : \begin{cases} X(c(G(j\omega_n, \boldsymbol{\theta})), r(G(j\omega_n, \boldsymbol{\theta}))) \subseteq \mathbb{G}_n^d, \\ \boldsymbol{\theta} \in \Theta, \end{cases} \quad (3.2.10)$$

avec $X(c(G(j\omega_n, \boldsymbol{\theta})), r(G(j\omega_n, \boldsymbol{\theta})))$, l'intervalle complexe circulaire de la réponse fréquentielle (3.2.4) pour la fréquence ω_n et Θ l'ensemble de recherche.

Le vecteur de paramètres $\boldsymbol{\theta}$ du modèle (3.2.3) est jugé faisable si le modèle évalué avec $\boldsymbol{\theta}$ est consistant avec les fonctions d'inclusion $\mathbb{G}_n^d$ pour chaque fréquence ω_n .

3.2.4 Mise en place des algorithmes pour l'estimation garantie

L'ensemble $\mathbb{S}$ des solutions des CSP (3.2.6), (3.2.8) et (3.2.10) est donné par :

$$\mathbb{S} = \{ \boldsymbol{\theta} \in \Theta \mid f(\omega_n, \boldsymbol{\theta}) \in [y(\omega_n)], \forall n \in \{1, \dots, N\} \}. \quad (3.2.11)$$

La caractérisation de l'ensemble $\mathbb{S}$ est un problème d'inversion ensembliste, qui peut être résolu d'une manière garantie, par les méthodes d'inversion ensemblistes en utilisant la contraction et la bisection (voir Chapitre 1, paragraphe 1.4).

Lors de l'utilisation de la représentation rectangulaire, f et y sont définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\omega_n, \theta) = \begin{pmatrix} \Re(G(j\omega_n, \theta)) \\ \Im(G(j\omega_n, \theta)) \end{pmatrix} \\ [y(\omega_n)] = \begin{pmatrix} [\Re(\mathbb{G}_n^r), \overline{\Re(\mathbb{G}_n^r)}] \\ [\Im(\mathbb{G}_n^r), \overline{\Im(\mathbb{G}_n^r)}] \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (3.2.12)$$

Lors de l'utilisation de la représentation polaire, f et y sont définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\omega_n, \theta) = \begin{pmatrix} |G(j\omega_n, \theta)| \\ \varphi(\omega_n, \theta) \end{pmatrix} \\ [y(\omega_n)] = \begin{pmatrix} [\underline{G_n}, \overline{G_n}] \\ [\underline{\varphi}, \overline{\varphi}] \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (3.2.13)$$

Lors de l'utilisation de la représentation circulaire, f et y sont définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\omega_n, \theta) = X(c(G(j\omega_n, \theta)), r(G(j\omega_n, \theta))) \\ [y(\omega_n)] = \mathbb{G}_n^d \end{array} \right. \quad (3.2.14)$$

Des CSP réel et complexe sont utilisés lors de l'estimation ensembliste par les représentations rectangulaire et polaire. Seul le CSP complexe peut être utilisé pour la représentation circulaire. Par conséquent, il est nécessaire de programmer l'algorithme d'inversion ensembliste par analyse par intervalle SIVIA, en utilisant différentes boîtes à outils et solveurs qui permettent d'utiliser les trois fonctions d'inclusion en se basant sur des CSP réels, des CSP complexes, ou les deux à la fois. Seule l'approximation extérieure est calculée car le pessimisme introduit par chaque mode de représentation (voir 3.1, 3.2, 3.3) ne permet pas d'obtenir l'approximation intérieure.

3.2.4.1 Rappel de l'algorithme SIVIA avec contracteur

L'algorithme de partitionnement SIVIA permet une caractérisation garantie de ces ensembles de pavés en utilisant un test d'inclusion défini par :

$$t([x]) = \begin{cases} 1 & \text{si } [f]([x]) \subseteq [y], \\ 0 & \text{si } [f]([x]) \cap [y] = \emptyset, \\ \text{indéterminé} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.2.15)$$

Un pavé $[x] \in \mathbb{X}$ est dit :

- faisable et $[x] \in \underline{\mathbb{S}}, [x] \in \overline{\mathbb{S}}, \text{ si } t([x]) = 1$,
- non faisable, si $t([x]) = 0$,
- indéterminé, si $t([x])$ est indéterminé.

Dans ce dernier cas, aucune décision à propos du pavé $[x]$ n'est possible. Si sa taille est supérieure à une certaine tolérance η fixée par l'utilisateur, il est partitionné en deux sous-pavés et l'algorithme est réexécuté sur chacun d'eux. L'algorithme SIVIA-Contracteur est le suivant :

Algorithme SIVIA-Contracteur (entrées : $[t], [\mathbf{x}], \eta$; sortie : $\underline{\mathbb{S}}, \overline{\mathbb{S}}$)

1. $[\mathbf{x}] \leftarrow \mathcal{C}([\mathbf{x}])$
2. Si $t([\mathbf{x}]) = 0$, alors rejeter $[\mathbf{x}]$, retour,
3. Si $t([\mathbf{x}]) = [1]$, alors $\underline{\mathbb{S}} := \underline{\mathbb{S}} \cup [\mathbf{x}]; \overline{\mathbb{S}} := \overline{\mathbb{S}} \cup [\mathbf{x}]$, retour,
4. Si $w([\mathbf{x}]) \leq \eta$, alors $\overline{\mathbb{S}} := \overline{\mathbb{S}} \cup [\mathbf{x}]$, retour,
Sinon bissecter $[\mathbf{x}]$ en $([\mathbf{x}_1], [\mathbf{x}_2])$,
5. SIVIA-Contracteur (entrées : $[t], [\mathbf{x}_1], \eta$; sortie : $\underline{\mathbb{S}}, \overline{\mathbb{S}}$),
6. SIVIA-Contracteur (entrées : $[t], [\mathbf{x}_2], \eta$; sortie : $\underline{\mathbb{S}}, \overline{\mathbb{S}}$).

3.2.4.2 Algorithme SIVIA sous INTLAB

La boîte à outils INTLAB du logiciel MATLAB, permet de manipuler des intervalles réels ainsi que des intervalles complexes circulaires. L'algorithme d'inversion ensembliste SIVIA avec contracteur développé sous INTLAB est utilisé pour la représentation circulaire complexe des intervalles.


```

1  % Fonction : SIVIA.m
2  % CSP Complexe - Fonction d'Inclusion Circulaire
3
4  function S_sup = SIVIA (x,eta,mesures,S_sup)
5  x=contract(x); % Contracteur propagation retropropagation
6
7  % FIC = Fonction d'Inclusion Circulaire
8  FIC = reponse_frequentielle(x);
9
10 % Appel de la fonction de test d'inclusion
11 test=test_inclusion(FIC,mesures);
12
13 if test==0 % x est rejete
14     disp('x ne fait pas partie de l'ensemble de solutions S');
15     elseif test==1 % x fait partie de l'approx interieure
16         disp('x est dans S');
17         elseif max(diam(x))<=eta % eta = precision fixee
18             S_sup=[S_sup;x]; % x fait partie de l'approx exterieure
19     else
20         [x1,x2]=bissect(x); % Appel de la fonction de Bissection
21         %% Appel recursive de l'algorithme SIVIA
22         S_sup = SIVIA (x1,eta,mesures,S_sup);
23         S_sup = SIVIA (x2,eta,mesures,S_sup);
24     end

```

3.2.4.3 Algorithme SIVIA sous C-XSC

La boîte à outils C-XSC, permet de manipuler des intervalles réels ainsi que des intervalles complexes rectangulaires. L'algorithme d'inversion ensembliste SIVIA avec contracteur developé sous C-XSC est utilisé pour la représentation rectangulaire complexe des intervalles.

```

1 // Fonction : SIVIA.cc
2 // CSP Complexe - Fonction d'Inclusion Rectangulaire
3 using namespace cxsc;
4 using namespace std;
5 void Sivia (P Test,const ivector& x, double eta) {
6   ivector x = contract(x); // Contracteur Propagation-Retropropagation
7   int test = Test(x,y);    // Test d'inclusion x dans y
8   if (test == 0){
9     cout << x << ": ne fait pas partie de l'ensemble de solutions" << endl;
10    return;
11  }
12  if (test == 1){
13    cout << x << " : x fait partie de l'approx interieure" << endl;
14    return;
15  }
16  if (maxdiam(x)<=eta){
17    cout << x << " : x fait partie de l'approx exterieure" << endl;
18    return;
19  }
20  if(test == 2){
21    bissect(x);
22    // La fonction de bisection met a jour les variables xlow et xup
23    // Appel recursive de l'algorithme SIVIA
24    Sivia(Test, xlow, eta);
25    Sivia(Test, xup, eta); }
26  }

```

Après avoir contracter l'espace initial de recherche par le contracteur propagation rétro-propagation, la fonction d'inclusion, circulaire pour SIVIA sous INTLAB et rectangulaire pour SIVIA sous C-XSC, est obtenue en calculant la réponse fréquentielle complexe (3.2.4). La fonction *test* est ensuite utilisée pour tester l'inclusion, avant de bissecter le pavé $[x]$ par la fonction *bissect*. L'algorithme SIVIA est appelé ensuite d'une manière récursive.

3.2.4.4 Programme utilisant le solveur QUIMPER

Le solveur QUIMPER, permet de manipuler des intervalles réels. Dans un script QUIMPER, après avoir déclaré toutes les constantes utilisées pour exprimer les différentes contraintes champs **Constants**, l'espace initial de recherche des paramètres du vecteur θ est défini dans le champ **Variables**. Toutes les contraintes à satisfaire sont par la suite décrites dans le champs *constraint-list*. L'avant dernière étape consiste à supprimer tous les pavés dont l'intersection

avec l'espace des contraintes est un ensemble vide, en utilisant un contracteur appelé **Inter**. Enfin, le contracteur de précision **isthick** est utilisé pour fixer le diamètre des pavés qui feront partie de l'ensemble $\mathbb{S}$ des solutions.

3.3 Exemple d'estimation ensembliste des paramètres d'un modèle de première espèce

Au vue de la complexité algorithmique des méthodes d'inversion ensembliste, on s'intéresse ici à l'estimation garantie de modèle non entier de première espèce :

$$G_1(s, \boldsymbol{\theta}) = \frac{k}{s^\nu + b}. \quad (3.3.1)$$

A cet effet, un modèle linéaire incertain est utilisé pour générer les données.

$$G_1(s, \boldsymbol{\theta}_i) = \frac{k_i}{s^{\nu_i} + b_i}, \quad i = 1, \dots, I, \quad (3.3.2)$$

avec $\boldsymbol{\theta}_i = (k_i, b_i, \nu_i)^T$. Les incertitudes sur les différents paramètres sont générées à partir d'une dispersion autour de paramètres nominaux $\boldsymbol{\theta}_0$:

$$\begin{cases} k_i = 3 + \rho_k^{(i)}, \\ b_i = 2 + \rho_b^{(i)}, \\ \nu_i = 0.5 + \rho_\nu^{(i)}. \end{cases} \quad (3.3.3)$$

avec $\boldsymbol{\theta}_0 = (3, 2, 0.5)^T$ et $\rho_k^{(i)}$, $\rho_b^{(i)}$, et $\rho_\nu^{(i)}$ représentent la i ème réalisation de variables aléatoires uniformément distribuées dans respectivement les intervalles $[-0.2, 0.2]$, $[-0.2, 0.2]$, $[-0.05, 0.05]$. L'espace initial de recherche du vecteur des paramètres du modèle (3.3.1) est fixé à :

$$([k], [b], [\nu]) = ([0.00, 20.00], [0.00, 20.00], [0.00, 2.00]). \quad (3.3.4)$$

L'espace initial de recherche du paramètre $[\nu]$ correspond au domaine de stabilité, défini par le théorème de *Matignon* (page 55). Le domaine initial de recherche du paramètre $[b]$ est à l'intérieur du domaine de stabilité. L'espace initial de recherche du paramètre k peut quant à lui être fixé en examinant le gain statique des réponses fréquentielles. La précision η nécessaire à l'algorithme SIVIA est fixée pour chaque paramètre à 0.01.

Les réponses fréquentielles pour les modèles définis par (3.3.2) sur chaque fréquence ω_n sont données par :

$$G_1(j\omega_n, \boldsymbol{\theta}_i) = \frac{k_i}{(j\omega_n)^{\nu_i} + b_i}, \quad \begin{cases} i = 1, \dots, 20, \\ n = 1, \dots, 36. \end{cases} \quad (3.3.5)$$

Ces réponses fréquentielles sont présentées sur les diagrammes de *Nyquist* et de *Bode* en utilisant les trois représentations rectangulaire, polaire et circulaire respectivement sur les figures 3.4, 3.5 et 3.6.

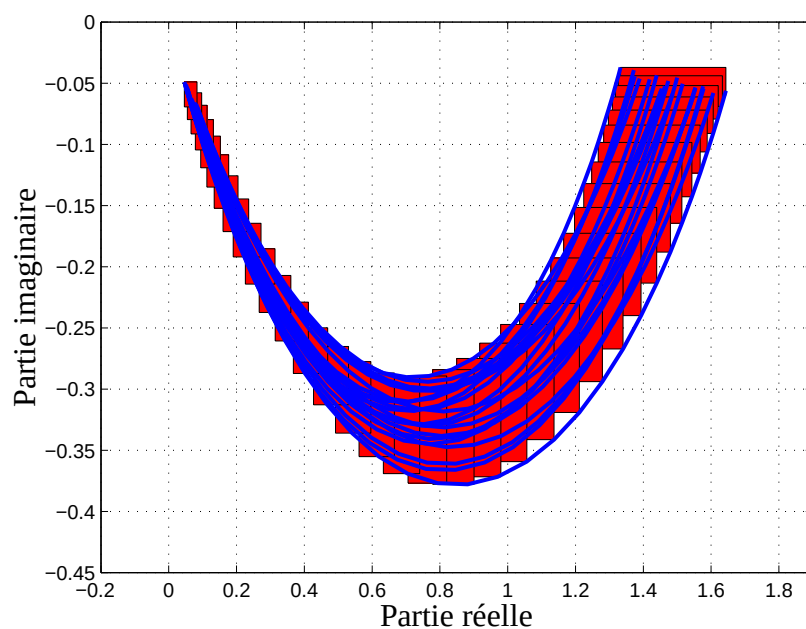


FIG. 3.4 – Diagrammes de *Nyquist* des vingt modèles de première espèce avec les rectangles d'incertitude correspondant

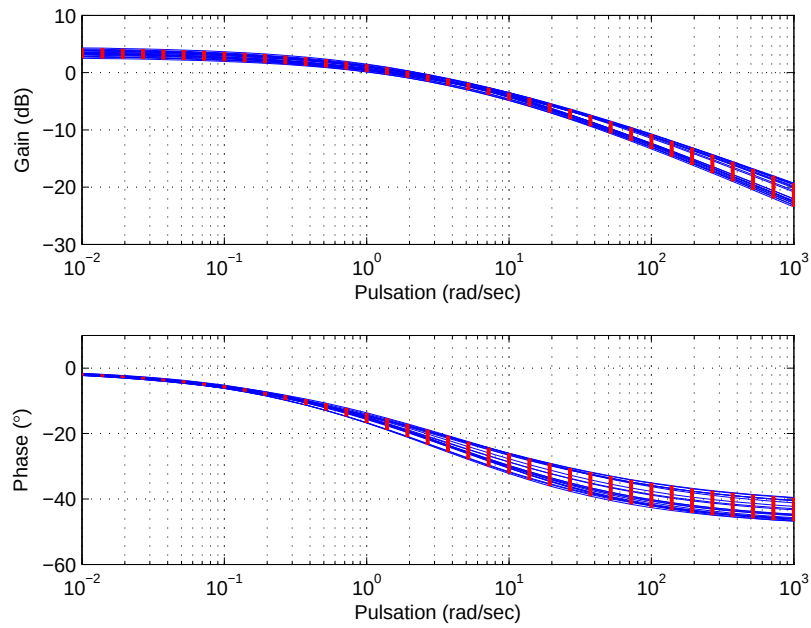


FIG. 3.5 – Diagrammes de *Bode* des vingt modèles de première espèce avec les intervalles d'incertitude correspondant

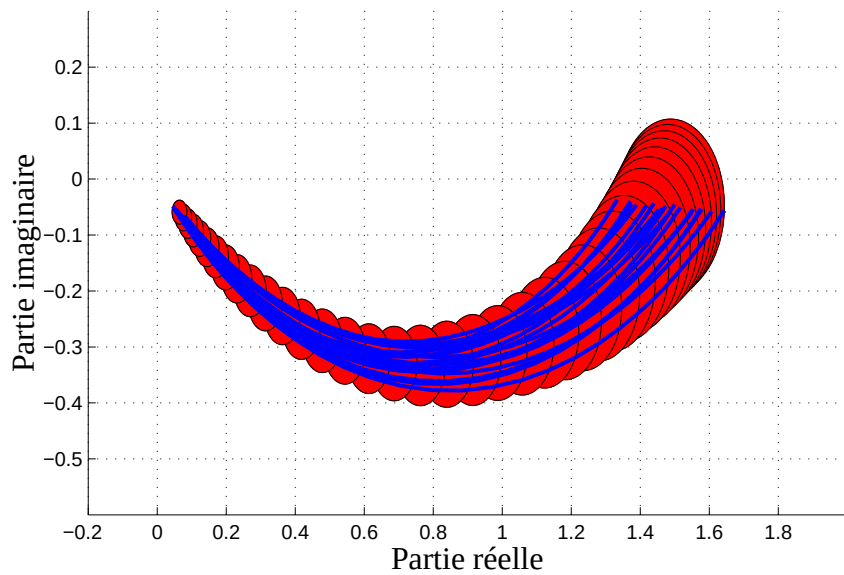


FIG. 3.6 – Diagrammes de *Nyquist* des vingt modèles de première espèce avec les intervalles d'incertitude circulaire

3.3.1 Estimation ensembliste par la représentation rectangulaire

La réponse fréquentielle du modèle défini par (3.3.1) est donnée par :

$$G_1(j\omega, \theta) = \frac{k}{(j\omega)^\nu + b}. \quad (3.3.6)$$

$$G_1(j\omega_n, \theta) = \frac{k}{(e^{j\frac{\pi}{2}}\omega_n)^\nu + b}, \quad (3.3.7)$$

$$G_1(j\omega_n, \theta) = \frac{k}{(b + \cos(\nu\frac{\pi}{2})\omega_n)^\nu + j(\sin(\nu\frac{\pi}{2})\omega_n^\nu)}, \quad (3.3.8)$$

ou finalement en isolant la partie réelle et la partie imaginaire :

$$G_1(j\omega_n, \theta) = \frac{k(b + \omega_n^\nu \cos(\nu\frac{\pi}{2}))}{b^2 + 2b\omega_n^\nu \cos(\nu\frac{\pi}{2}) + \omega_n^{2\nu}} + j \frac{-k\omega_n^\nu \sin(\nu\frac{\pi}{2})}{b^2 + 2b\omega_n^\nu \cos(\nu\frac{\pi}{2}) + \omega_n^{2\nu}}. \quad (3.3.9)$$

Deux CSP sont utilisés pour l'estimation ensembliste par la représentation rectangulaire. Un CSP réel, basé sur l'arithmétique des intervalles réels et la décomposition de la réponse fréquentielle complexe en deux parties : partie réelle et partie imaginaire (3.3.9). Un CSP complexe, basé sur l'arithmétique des intervalles complexes et sur la réponse fréquentielle complexe sans décomposition (3.3.8).

3.3.1.1 CSP réel pour l'estimation de paramètres du modèle de première espèce

L'encadrement extérieur $\overline{\mathbb{S}}$ de l'ensemble de solutions du CSP réel est obtenu en utilisant le solveur QUIMPER. Il peut être inclus dans le cube :

$$([k], [b], [\nu]) = ([2.58, 3.52], [1.68, 2.40], [0.46, 0.56]), \quad (3.3.10)$$

et projeté en 2D sur les figures 3.7(a) et 3.7(b).

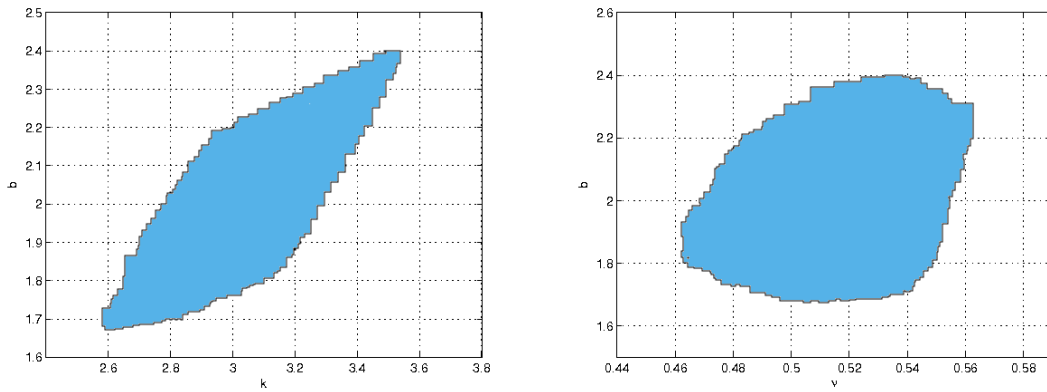
La figure 3.8 montre que toutes les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\overline{\mathbb{S}}$ sont consistantes avec les rectangles d'incertitude permettant ainsi de valider le modèle ensembliste obtenu.

3.3.1.2 CSP complexe pour l'estimation de paramètres du modèle de première espèce

L'encadrement extérieur $\overline{\mathbb{S}}$ de l'ensemble de solutions du CSP complexe est obtenu en utilisant la boîte à outil C-XSC. Il peut être inclus dans le cube :

$$([k], [b], [\nu]) = ([2.56, 3.59], [1.66, 2.43], [0.45, 0.56]), \quad (3.3.11)$$

et projeté en 2D sur les figures 3.9(a) et 3.9(b).



(a) Projection sur le plan (b, k) de l'ensemble de solutions obtenues
(b) Projection sur le plan (b, ν) de l'ensemble de solutions obtenues

FIG. 3.7 – Projection en 2D de l'ensemble de solutions du CSP réel - représentation rectangulaire

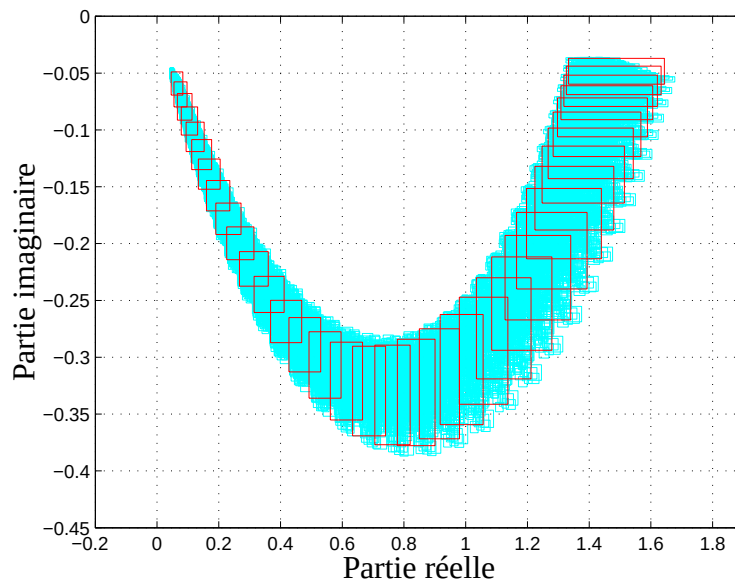
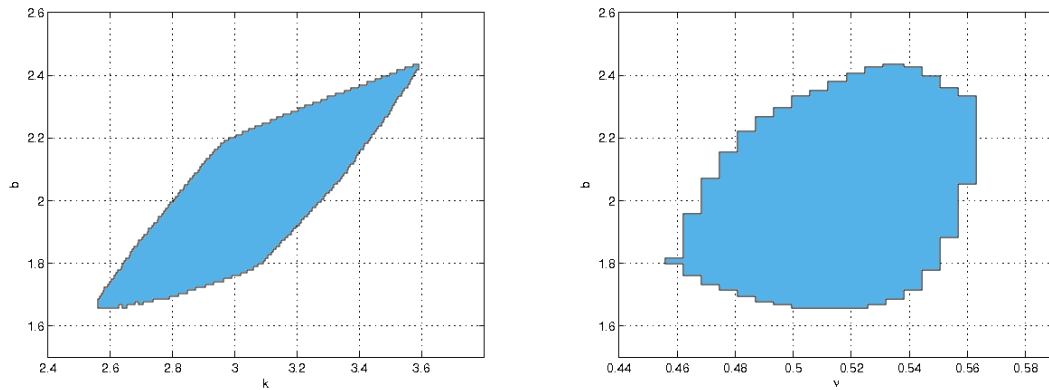


FIG. 3.8 – Diagramme de *Nyquist* des mesures incertaines (en rouge) et les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\bar{\mathbb{S}}$ du CSP réel (en vert) - représentation rectangulaire

La figure 3.10 montre que toutes les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\bar{\mathbb{S}}$ sont consistantes avec les rectangles d'incertitude permettant ainsi de valider le modèle ensembliste obtenu.



(a) Projection sur le plan (b, k) de l'ensemble de solutions obtenues
(b) Projection sur le plan (b, ν) de l'ensemble de solutions obtenues

FIG. 3.9 – Projection en 2D de l'ensemble de solutions du CSP complexe - représentation rectangulaire

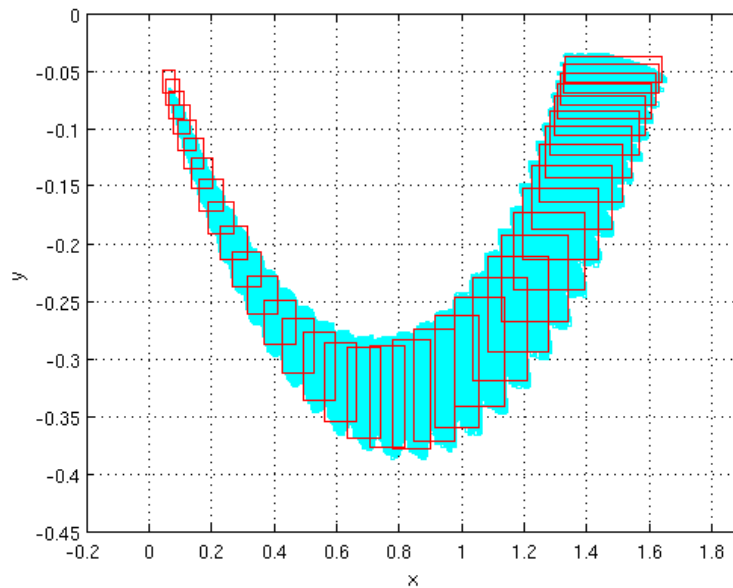


FIG. 3.10 – Diagramme de *Nyquist* des mesures incertaines (en rouge) et les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\bar{\mathbb{S}}$ du CSP complexe (en vert) - représentation rectangulaire

3.3.1.3 Comparaison entre le CSP réel et le CSP complexe sur la représentation rectangulaire

L'objectif final est d'aboutir à une précision meilleure en fusionnant les résultats issus des trois représentations. Fusionner les résultats revient à intersecter les ensembles de solutions

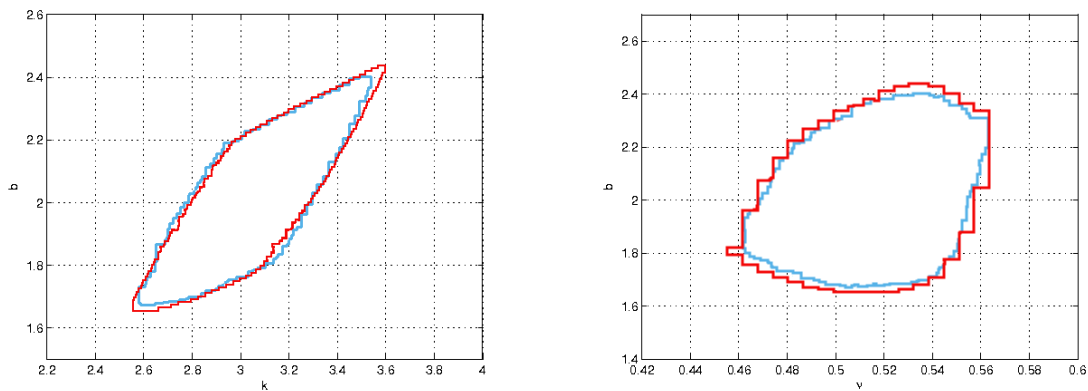
issues de ces représentations. Par conséquent, les points éliminés par l'une des deux CSP sont rejetés de la solution finale.

Une comparaison des ensembles de solutions obtenus pour la représentation rectangulaire par les deux CSP est d'abord effectuée. La méthode qui fournit l'ensemble de solutions le moins pessimiste est retenue pour la comparaison finale avec les représentations polaire et circulaire.

Le tableau 3.1 présente les intervalles d'inclusion pour l'ensemble de solutions estimé pour chaque paramètre des deux CSP.

Paramètres	$[k]$	$[b]$	$[\nu]$
CSP réel	[2.58, 3.52]	[1.68, 2.40]	[0.46, 0.56]
CSP complexe	[2.56, 3.59]	[1.66, 2.43]	[0.45, 0.56]
Inclusion rectangulaire finale	[2.58, 3.52]	[1.68, 2.40]	[0.46, 0.56]

TAB. 3.1 – Comparaison du CSP réel et complexe de la représentation rectangulaire sur le modèle de première espèce



(a) Projection sur le plan (b, k) de l'ensemble de solutions obtenu à partir de CSP réel (en bleu) et de CSP complexe (en rouge)

(b) Projection sur le plan (b, ν) de l'ensemble de solutions obtenu à partir de CSP réel (en bleu) et de CSP complexe (en rouge)

FIG. 3.11 – Comparaison des ensembles de solutions obtenus par les deux CSP projetés en 2D - représentation rectangulaire

A travers les figures 3.11(a) et 3.11(b), l'ensemble de solutions obtenu en utilisant le CSP complexe est légèrement plus pessimiste que l'ensemble de solutions obtenu en utilisant le CSP réel (figure 3.11(b)). Il permet toutefois d'éliminer certaines solutions de l'ensemble final.

3.3.2 Estimation ensembliste par la représentation polaire

La réponse fréquentielle du modèle défini par (3.3.1) est donnée par :

$$G_1(j\omega, \theta) = |G_1(j\omega, \theta)| \exp^{j\varphi(\omega, \theta)} \quad (3.3.12)$$

où $|G_1(j\omega, \theta)|$ et $\varphi(\omega, \theta)$ représentent le gain et la phase des réponses fréquentielles données respectivement par :

$$|G_1(j\omega, \theta)| = \frac{|k|}{\sqrt{(b + \cos(\nu \frac{\pi}{2}) \omega^\nu)^2 + (\sin(\nu \frac{\pi}{2}) \omega^\nu)^2}} \quad (3.3.13)$$

$$\varphi(\omega, \theta) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{\sin(\nu \frac{\pi}{2}) \omega^\nu}{\text{Den}(\omega)}\right), & \text{si } \text{Den}(\omega) > 0, \\ -\pi - \arctan\left(\frac{\sin(\nu \frac{\pi}{2}) \omega^\nu}{\text{Den}(\omega)}\right), & \text{si } \text{Den}(\omega_n) < 0 \end{cases} \quad (3.3.14)$$

avec $\text{Den}(\omega) = b + \cos(\nu \frac{\pi}{2}) \omega^\nu$.

Deux CSP sont utilisés pour l'estimation ensembliste par la représentation polaire. Un CSP réel, basé sur l'arithmétique des intervalles réels et la décomposition de la réponse fréquentielle complexe en deux parties, gain (3.3.13) et phase (3.3.14). Un CSP complexe, basé sur l'arithmétique des intervalles complexes et la réponse fréquentielle polaire sans décomposition (3.3.12).

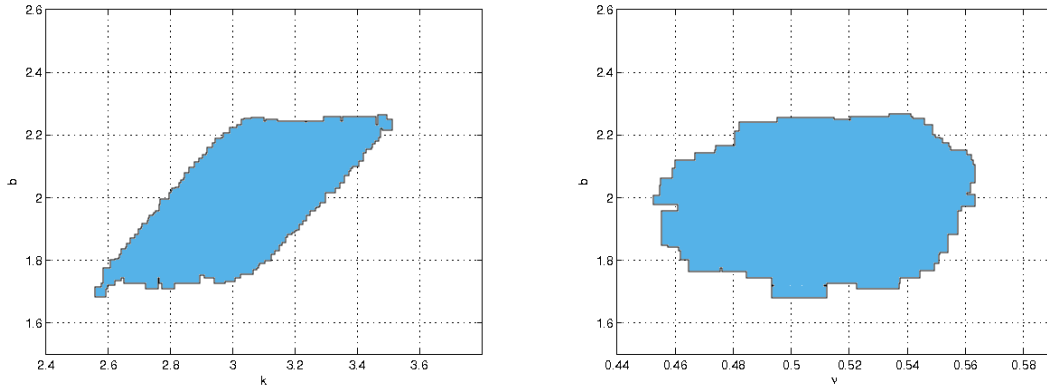
3.3.2.1 CSP réel pour l'estimation des paramètres du modèle de première espèce

L'encadrement extérieur $\bar{\mathbb{S}}$ de l'ensemble de solutions du CSP réel est obtenu en utilisant le solveur QUIMPER. Il peut être inclus dans le cube :

$$([k], [b], [\nu]) = ([2.56, 3.50], [1.69, 2.26], [0.45, 0.56]), \quad (3.3.15)$$

et projeté en 2D sur les figures 3.12(a) et 3.12(b).

La figure 3.13 montre que toutes les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\bar{\mathbb{S}}$ sont consistantes avec les intervalles d'incertitude permettant ainsi de valider le modèle ensembliste obtenu.



(a) Projection sur le plan (b, k) de l'ensemble de solutions obtenu
(b) Projection sur le plan (b, ν) de l'ensemble de solutions obtenu

FIG. 3.12 – Projection en 2D de l'ensemble de solutions du CSP réel - représentation polaire

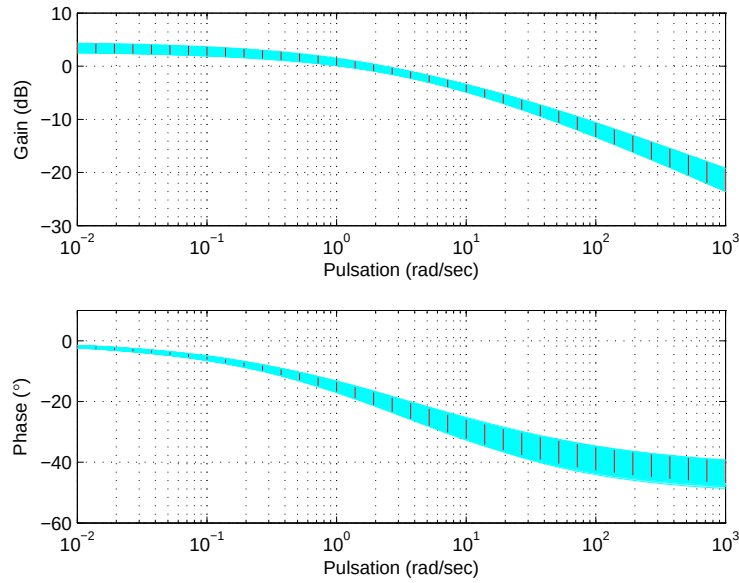


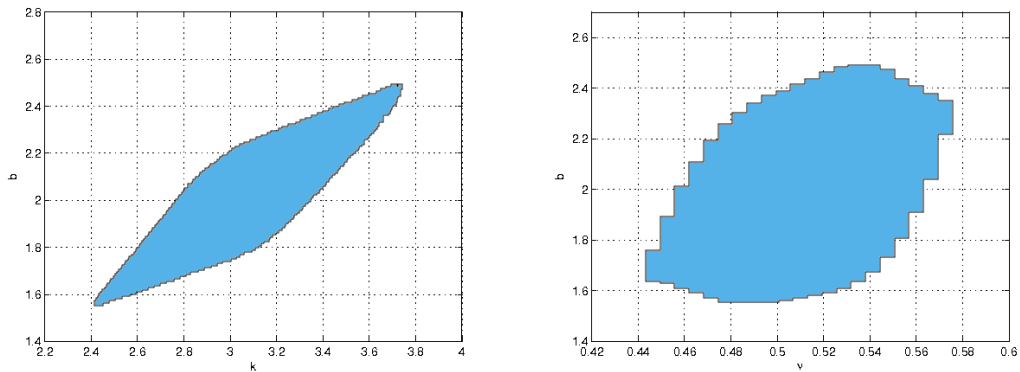
FIG. 3.13 – Diagramme de *Bode* des mesures incertaines (en rouge) et les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\bar{\mathbb{S}}$ du CSP réel (en vert) - représentation polaire

3.3.2.2 CSP complexe pour l'estimation des paramètres du modèle de première espèce

L'encadrement extérieur $\bar{\mathbb{S}}$ de l'ensemble de solutions du CSP complexe est obtenu en utilisant la boîte à outils C-XSC. Il peut être inclus dans le cube :

$$([k], [b], [\nu]) = ([2.40, 3.74], [1.55, 2.49], [0.44, 0.57]), \quad (3.3.16)$$

et projeté en 2D sur les figures 3.14(a) et 3.14(b).



(a) Projection sur le plan (b, k) de l'ensemble de solutions obtenu
(b) Projection sur le plan (b, ν) de l'ensemble de solutions obtenu

FIG. 3.14 – Projection en 2D de l'ensemble de solutions du CSP complexe - représentation polaire

La figure 3.15 montre que toutes les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\bar{\mathbb{S}}$ sont consistantes avec les intervalles d'incertitude permettant ainsi de valider le modèle ensembliste obtenu.

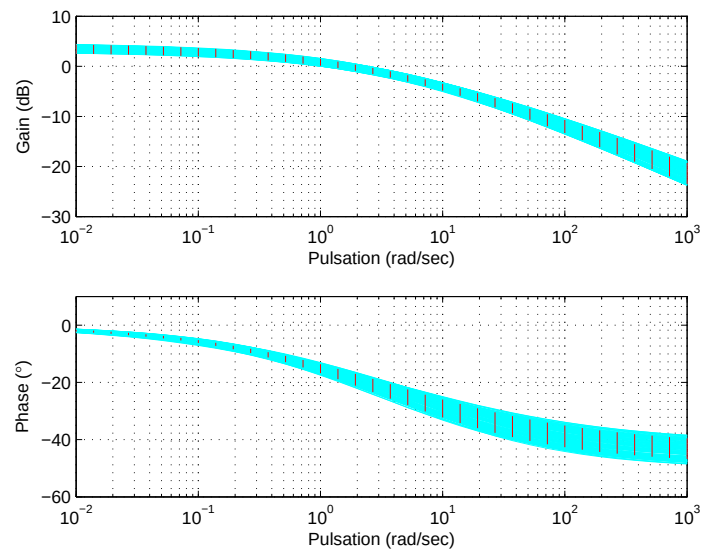


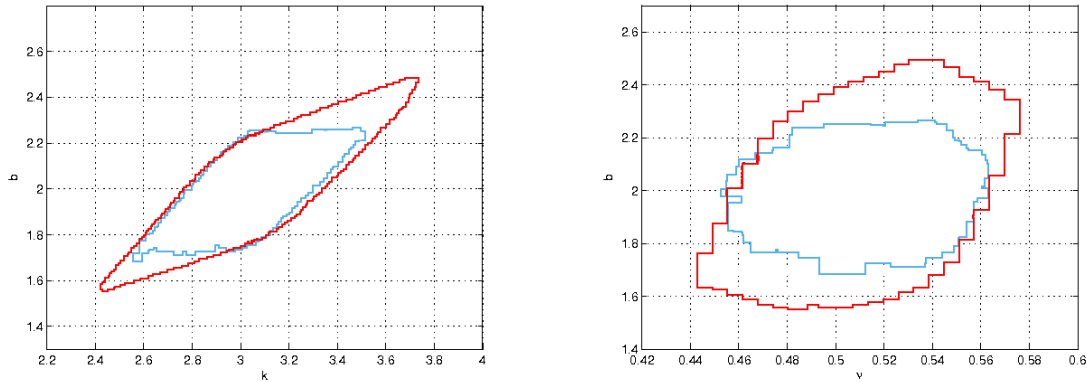
FIG. 3.15 – Diagramme de Bode des mesures incertaines (en rouge) et les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\bar{\mathbb{S}}$ (en vert)

3.3.2.3 Comparaison entre le CSP réel et le CSP complexe sur la représentation polaire

Le tableau 3.2 présente les intervalles d'inclusion pour l'ensemble estimé des solutions pour chaque paramètre avec les deux CSP, réel et complexe, de la représentation polaire.

Paramètres	$[k]$	$[b]$	$[\nu]$
CSP réel	[2.56, 3.50]	[1.69, 2.26]	[0.45, 0.56]
CSP complexe	[2.40, 3.74]	[1.55, 2.49]	[0.44, 0.57]
Inclusion polaire finale	[2.56, 3.50]	[1.69, 2.26]	[0.45, 0.56]

TAB. 3.2 – Comparaison des CSP réel et complexe de la représentation polaire sur le modèle de première espèce



(a) Projection sur le plan (b, k) de l'ensemble de solutions obtenu à partir du CSP réel (en bleu) et du CSP complexe (en rouge)

(b) Projection sur le plan (b, ν) de l'ensemble de solutions obtenu à partir du CSP réel (en bleu) et du CSP complexe (en rouge)

FIG. 3.16 – Comparaison des ensembles de solutions obtenus à travers les deux CSP projetés en 2D - représentation polaire

Comme le montre les figures 3.16(a) et 3.16(b), l'ensemble de solutions obtenu en utilisant un CSP complexe est plus pessimiste que l'ensemble de solutions obtenu en utilisant un CSP réel (figure 3.16(b)), même si sur quelques domaines le CSP complexe permet d'éliminer quelques solutions de l'ensemble final.

3.3.3 Estimation ensembliste par la représentation circulaire

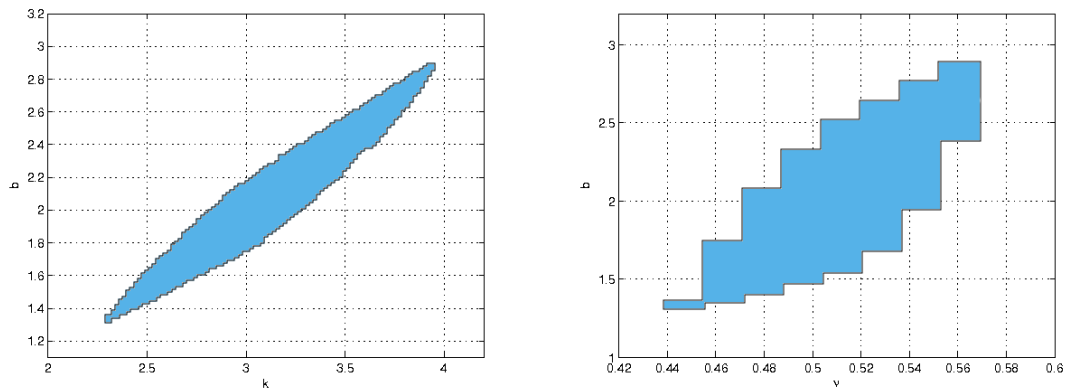
L'estimation ensembliste par la représentation circulaire est basée seulement sur le CSP complexe.

CSP complexe pour l'estimation des paramètres du modèle de première espèce

L'encadrement extérieur $\bar{\mathbb{S}}$ de l'ensemble de solutions du CSP complexe est obtenu en utilisant la boîte à outils INTLAB. Il peut être inclus dans le cube :

$$([k], [b], [\nu]) = ([2.29, 3.94], [1.32, 2.88], [0.43, 0.57]), \quad (3.3.17)$$

et projeté en 2D sur les figures 3.17(a) et 3.17(b).



(a) Projection sur le plan (b, k) de l'ensemble de solutions obtenu
(b) Projection sur le plan (b, ν) de l'ensemble de solutions obtenu

FIG. 3.17 – Projection en 2D de l'ensemble de solutions du CSP complexe - représentation circulaire

La figure 3.18 montre que toutes les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\bar{\mathbb{S}}$ sont consistantes avec les cercles d'incertitude permettant ainsi de valider le modèle ensembliste obtenu.

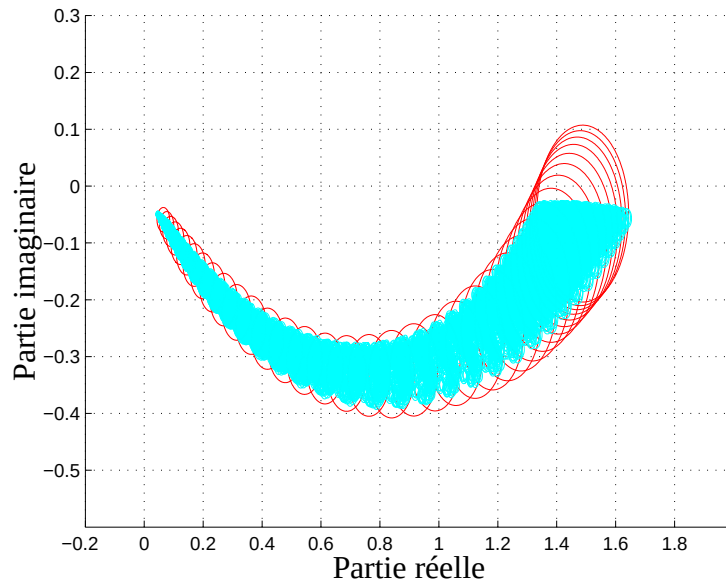


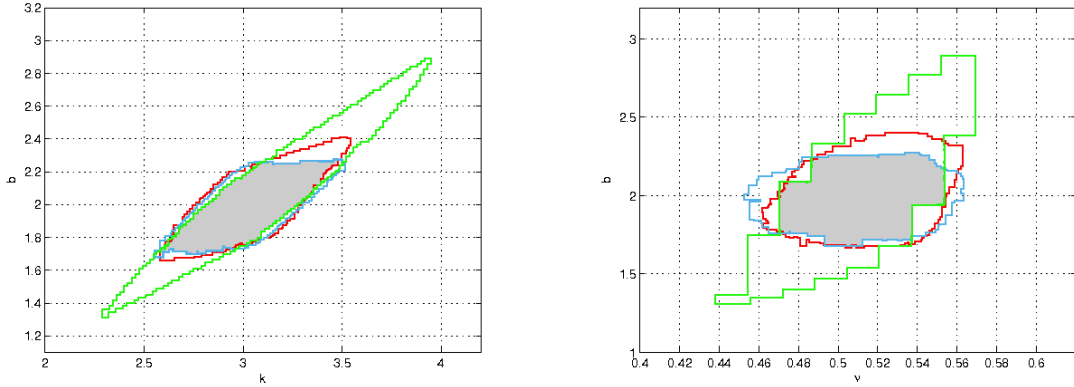
FIG. 3.18 – Diagramme de *Nyquist* des mesures incertaines (en rouge) et des réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\bar{\mathbb{S}}$ du CSP complexe (en vert) - représentation circulaire

3.3.4 Fusion de l'ensemble des solutions

Fusionner l'ensemble de solutions revient à faire une intersection des ensembles de solutions issus des trois représentations. Par conséquent, chaque point ne faisant pas partie de l'intersection des trois ensembles est éliminé de l'ensemble final. Le tableau 3.3 présente les intervalles d'inclusion pour chaque paramètre pour les trois représentations, ainsi que les intervalles d'inclusion finaux issus de l'opération de fusion.

Paramètres	$[k]$	$[b]$	$[\nu]$
Inclusion rectangulaire	[2.58, 3.52]	[1.68, 2.39]	[0.46, 0.56]
Inclusion polaire	[2.56, 3.50]	[1.69, 2.25]	[0.45, 0.56]
Inclusion circulaire	[2.29, 3.94]	[1.32, 2.88]	[0.43, 0.56]
Inclusion finale	[2.58, 3.50]	[1.69, 2.25]	[0.46, 0.56]

TAB. 3.3 – Comparaison des intervalles d'inclusion des paramètres du modèle de première espèce, obtenus des trois représentations



(a) Projection sur le plan (b, k) des ensembles de solutions obtenus à partir des trois présentations : rectangulaire (trait rouge), polaire (trait bleu) et circulaire (trait vert)

(b) Projection sur le plan (b, ν) des ensemble de solutions obtenus à partir des trois présentations : rectangulaire (trait rouge), représentation polaire (trait bleu) et circulaire (trait vert)

FIG. 3.19 – Comparaison des ensembles de solutions obtenus par les trois représentations projetés en 2D - première espèce

3.4 Exemple d'estimation ensembliste des paramètres d'un modèle de deuxième espèce

Après avoir traité un exemple d'un modèle de première espèce au paragraphe 3.3, on s'intéresse ici à l'estimation garantie de modèle non entier de deuxième espèce ayant quatre paramètres à estimer :

$$G_2(s, \theta) = \frac{k}{1 + 2\zeta \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^\nu + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^{2\nu}}. \quad (3.4.1)$$

A cet effet, un modèle linéaire incertain est utilisé pour générer les données.

$$G_2(s, \theta_i) = \frac{k_i}{1 + 2\zeta_i \left(\frac{s}{\omega_{0_i}}\right)^{\nu_i} + \left(\frac{s}{\omega_{0_i}}\right)^{2\nu_i}}, \quad (3.4.2)$$

avec $\theta_i = (k_i, \omega_{0_i}, \zeta_i, \nu_i)^T$. Les incertitudes sur les différents paramètres sont générés à partir d'une dispersion autour de paramètres nominaux θ_0 :

$$\begin{cases} k_i = 3 + \rho_k^{(i)}, \\ \omega_{0_i} = 3 + \rho_{\omega_0}^{(i)}, \\ \zeta_i = 0.4 + \rho_\zeta^{(i)}, \\ \nu_i = 0.5 + \rho_\nu^{(i)}. \end{cases} \quad (3.4.3)$$

avec $\theta_0 = (3, 3, 0.4, 0.5)^T$ et $\rho_k^{(i)}$, $\rho_{\omega_0}^{(i)}$, $\rho_\zeta^{(i)}$ et $\rho_\nu^{(i)}$ représentent la i ème réalisation de variables aléatoires uniformément distribuées dans les intervalles $[-0.2, 0.2]$, $[-0.2, 0.2]$, $[-0.05, 0.05]$ et $[-0.05, 0.05]$ respectivement.

L'espace initial de recherche du vecteur des paramètres du modèle (3.3.1) est fixé à :

$$\left([k], [\zeta], \left[\frac{1}{\omega_0} \right], [\nu] \right) = ([0.00, 20.00], [0.00, 10.00], [0.00, 10.00], [0.00, 2.00]). \quad (3.4.4)$$

L'espace initial de recherche du paramètre $[\nu]$ correspond au domaine de stabilité, défini par le théorème de *Matignon étendu* (page 55). Le domaine initial de recherche de l'inverse de la pulsation $[\frac{1}{\omega_0}]$ est fixé à $[0, 10]$. Le domaine de recherche du pseudo-facteur d'amortissement est à l'intérieur du domaine de stabilité $[-\cos \frac{\nu\pi}{2}, +\infty[$ (voir page 63). Et enfin, le gain k est fixé dans l'intervalle $[0, 20]$. La précision η nécessaire à l'algorithme SIVIA est fixée pour chaque paramètre à 0.02.

Les réponses fréquentielles pour les modèles définis par (3.3.2) sur chaque fréquence ω_n sont données par :

$$G_2(j\omega_n, \theta_i) = \frac{k_i}{1 + 2\zeta_i \left(\frac{j\omega_n}{\omega_{0_i}} \right)^{\nu_i} + \left(\frac{j\omega_n}{\omega_{0_i}} \right)^{2\nu_i}}, \quad \begin{cases} i = 1, \dots, 20, \\ n = 1, \dots, 36. \end{cases} \quad (3.4.5)$$

Ces réponses fréquentielle sont présentées sur les diagrammes de *Nyquist* et de *Bode* selon les trois représentations, sur les figures 3.20 , 3.21 et 3.22 respectivement.

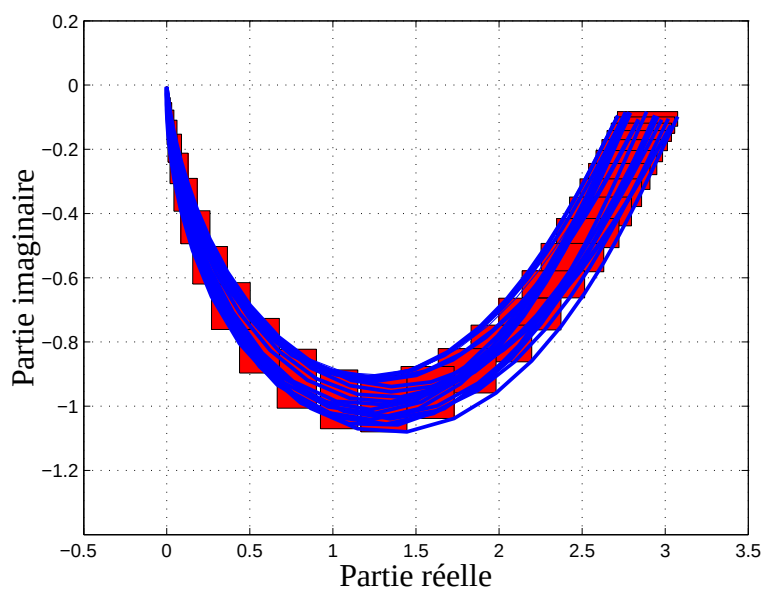


FIG. 3.20 – Diagrammes de *Nyquist* des vingt modèles de deuxième espèce avec les rectangles d'incertitude correspondant

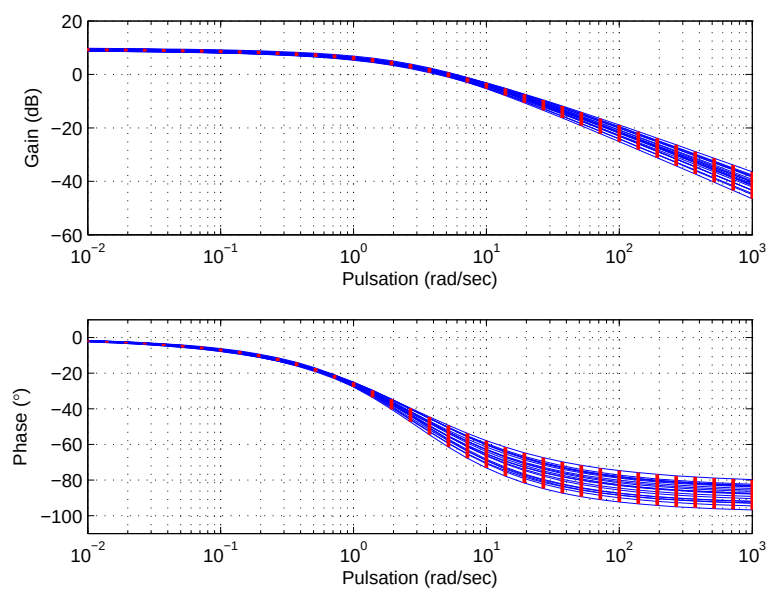


FIG. 3.21 – Diagrammes de *Bode* des vingt modèles de deuxième espèce avec les intervalles d'incertitude correspondant

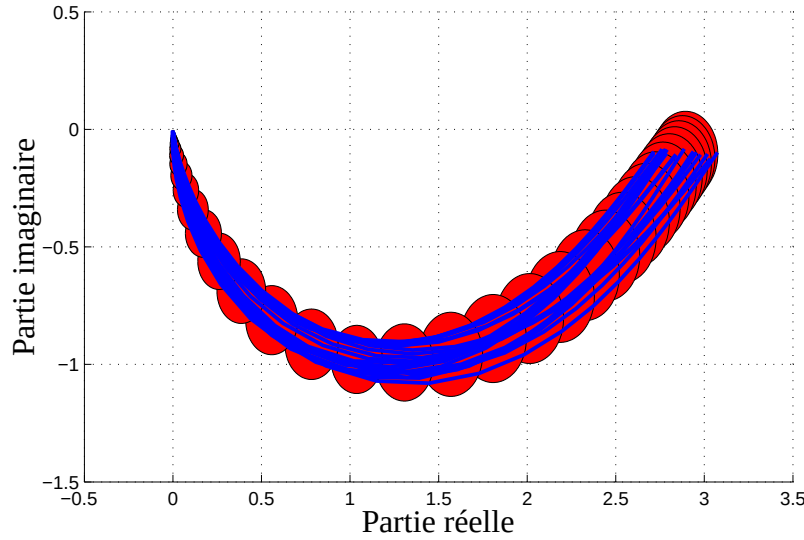


FIG. 3.22 – Diagrammes de *Nyquist* des vingt modèles de deuxième espèce avec les intervalles d'incertitude circulaire

3.4.1 Estimation ensembliste par la représentation rectangulaire

La réponse fréquentielle du modèle défini par (3.4.1) est donnée par :

$$G_2(j\omega_n, \theta) = \frac{k}{1 + 2\zeta \left(\frac{e^{j\frac{\pi}{2}} \omega_n}{\omega_0} \right)^\nu + \left(\frac{e^{j\frac{\pi}{2}} \omega_n}{\omega_0} \right)^{2\nu}}, \quad (3.4.6)$$

$$G_2(j\omega_n, \theta) = \frac{k}{1 + 2\zeta \left(\cos(\nu\frac{\pi}{2}) + j \sin(\nu\frac{\pi}{2}) \right) \left(\frac{\omega_n}{\omega_0} \right)^\nu + \left(\cos(\nu\pi) + j \sin(\nu\pi) \right) \left(\frac{\omega_n}{\omega_0} \right)^{2\nu}}, \quad (3.4.7)$$

$$G_2(j\omega_n, \theta) = \frac{k \left(1 + 2\zeta \cos(\frac{\nu\pi}{2}) \left(\frac{\omega_n}{\omega_0} \right)^\nu + \left(\frac{\omega_n}{\omega_0} \right)^{2\nu} \cos(\nu\pi) + \left(\frac{\omega_n}{\omega_0} \right)^\nu \cos(\nu\pi) \right)}{\left(1 + 2\zeta \cos(\frac{\nu\pi}{2}) \left(\frac{\omega_n}{\omega_0} \right)^\nu + \left(\frac{\omega_n}{\omega_0} \right)^{2\nu} \cos(\nu\pi) \right)^2 + \left(2\zeta \sin(\frac{\nu\pi}{2}) \left(\frac{\omega_n}{\omega_0} \right)^\nu + \left(\frac{\omega_n}{\omega_0} \right)^{2\nu} \sin(\nu\pi) \right)^2} + \frac{j \left(2\zeta \sin(\frac{\nu\pi}{2}) \left(\frac{\omega_n}{\omega_0} \right)^\nu + \left(\frac{\omega_n}{\omega_0} \right)^{2\nu} \sin(\nu\pi) \right)}{\left(1 + 2\zeta \cos(\frac{\nu\pi}{2}) \left(\frac{\omega_n}{\omega_0} \right)^\nu + \left(\frac{\omega_n}{\omega_0} \right)^{2\nu} \cos(\nu\pi) \right)^2 + \left(2\zeta \sin(\frac{\nu\pi}{2}) \left(\frac{\omega_n}{\omega_0} \right)^\nu + \left(\frac{\omega_n}{\omega_0} \right)^{2\nu} \sin(\nu\pi) \right)^2}. \quad (3.4.8)$$

Comme pour le cas des fonctions de transfert de première espèce, deux CSP sont utilisés pour l'estimation ensembliste par la représentation rectangulaire. Un CSP réel, basé sur l'arithmétique des intervalles réels et la décomposition de la réponse fréquentielle complexe en deux

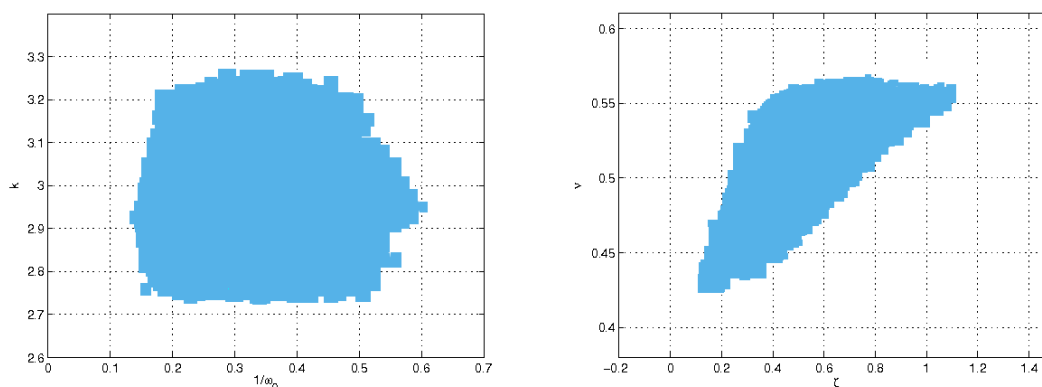
parties : partie réelle et partie imaginaire (3.4.8). Un CSP complexe, basé sur l'arithmétique des intervalles complexes et sur la réponse fréquentielle complexe sans décomposition (3.4.7).

3.4.1.1 CSP réel pour l'estimation des paramètres du modèle de deuxième espèce

L'encadrement extérieur $\bar{\mathbb{S}}$ de l'ensemble de solutions du CSP réel est obtenu en utilisant le solveur QUIMPER. Il peut être inclus dans l'hypercube :

$$\left([k], [\zeta], \left[\frac{1}{\omega_0} \right], [\nu] \right) = ([2.73, 3.27], [0.11, 1.16], [0.14, 0.61], [0.43, 0.57]), \quad (3.4.9)$$

et projeté en 2D sur les figures 3.23(a) et 3.23(b).



(a) Projection sur le plan (b, k) de l'ensemble de solutions obtenues
(b) Projection sur le plan (b, ν) de l'ensemble de solutions obtenues

FIG. 3.23 – Projection en 2D de l'ensemble de solutions du CSP réel - représentation rectangulaire

La figure 3.24 montre que toutes les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\bar{\mathbb{S}}$ sont consistantes avec les rectangles d'incertitude permettant ainsi de valider le modèle ensembliste obtenu.

Une meilleure précision sur les paramètres aurait permis d'obtenir les réponses fréquentielles plus précises des modèles évalués avec θ (voir p. 27).

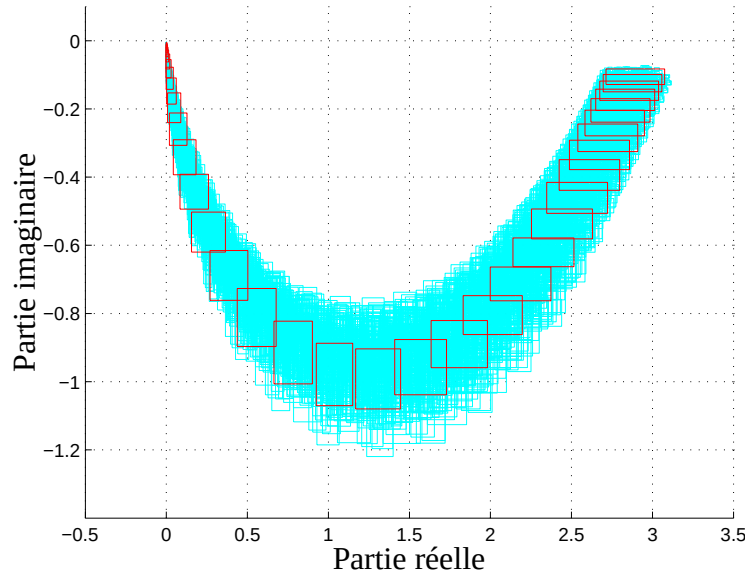


FIG. 3.24 – Diagramme de *Nyquist* des mesures incertaines (en rouge) et les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\bar{\mathbb{S}}$ du CSP réel (en vert) - représentation rectangulaire

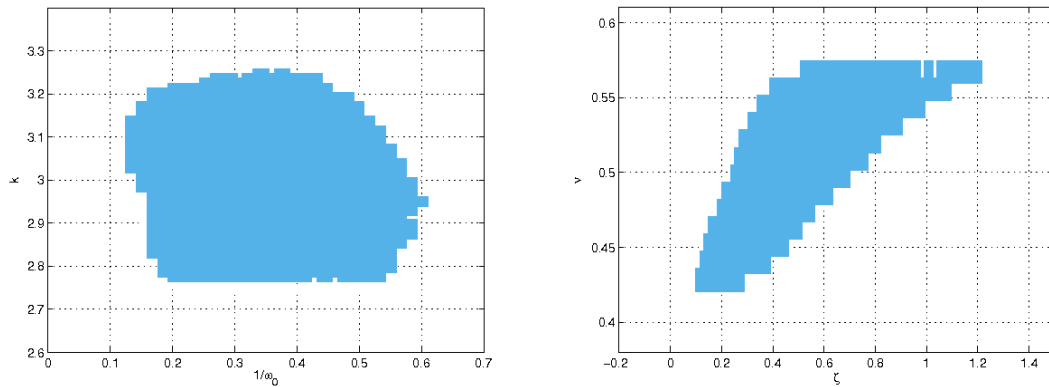
3.4.1.2 CSP complexe pour l'estimation des paramètres du modèle de deuxième espèce

L'encadrement extérieur $\bar{\mathbb{S}}$ de l'ensemble de solutions du CSP complexe est obtenu en utilisant la boîte à outil C-XSC. Il peut être inclus dans l'hypercube :

$$\left([k], [\zeta], \left[\frac{1}{\omega_0} \right], [\nu] \right) = ([2.77, 3.25], [0.09, 1.22], [0.12, 0.62], [0.42, 0.57]), \quad (3.4.10)$$

et projeté en 2D sur les figures 3.25(a) et 3.25(b).

La figure 3.26 montre que toutes les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\bar{\mathbb{S}}$ sont consistantes avec les rectangles d'incertitude permettant ainsi de valider le modèle ensembliste obtenu.



(a) Projection sur le plan $(k, \frac{1}{\omega_0})$ de l'ensemble de solutions obtenu
(b) Projection sur le plan (ν, ζ) de l'ensemble de solutions obtenu

FIG. 3.25 – Projection en 2D de l'ensemble de solutions du CSP complexe - représentation rectangulaire

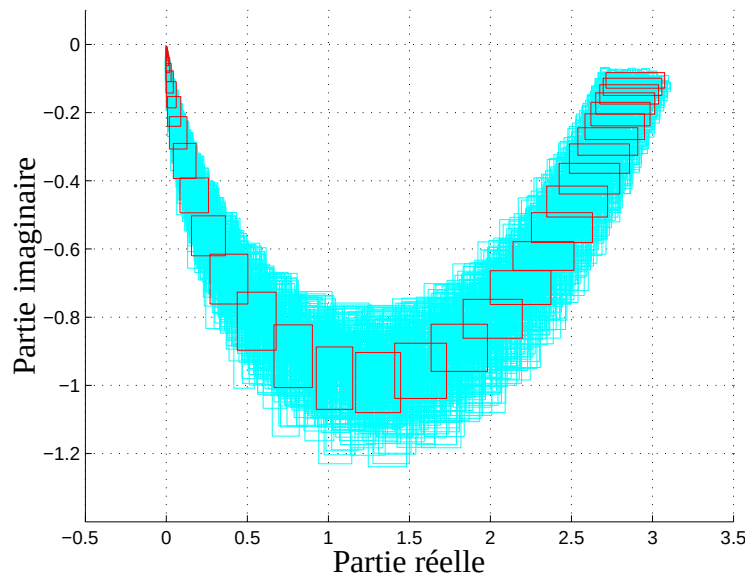


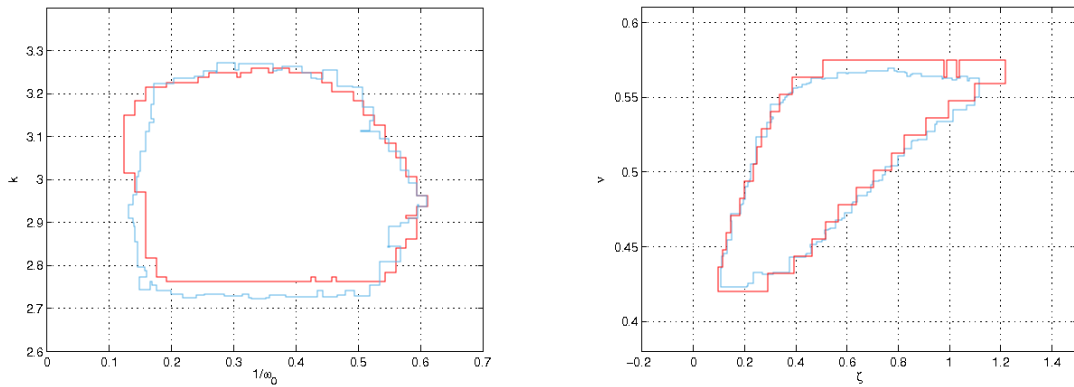
FIG. 3.26 – Diagramme de *Nyquist* des mesures incertaines (en rouge) et les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\bar{\mathcal{S}}$ du CSP complexe (en vert) - représentation rectangulaire

3.4.1.3 Comparaison entre le CSP réel et le CSP complexe sur la représentation rectangulaire

Le tableau 3.4 présente les intervalles d'inclusion pour l'ensemble des solutions estimé pour chaque paramètre pour les deux CSP réel et complexe de la représentation rectangulaire.

Paramètres	$[k]$	$[\zeta]$	$[\frac{1}{\omega_0}]$	$[\nu]$
CSP réel	[2.73, 3.27]	[0.11, 1.16]	[0.14, 0.61]	[0.43, 0.57]
CSP complexe	[2.77, 3.25]	[0.09, 1.22]	[0.12, 0.62]	[0.42, 0.57]
Inclusion rectangulaire finale	[2.77, 3.25]	[0.11, 1.16]	[1.14, 0.61]	[0.43, 0.57]

TAB. 3.4 – Comparaison du CSP réel et complexe de la représentation rectangulaire sur le modèle de deuxième espèce



(a) Projection sur le plan $(k, \frac{1}{\omega_0})$ de l'ensemble de solutions obtenus à partir du CSP réel (en bleu) et du CSP complexe (en rouge)

(b) Projection sur le plan (ν, ζ) de l'ensemble de solutions obtenus à partir du CSP réel (en bleu) et le CSP complexe (en rouge)

FIG. 3.27 – Comparaison des ensembles de solutions obtenus par les deux CSP projetés en 2D - représentation rectangulaire

Il est difficile d'en déduire à travers ces deux figures le CSP qui fournit l'ensemble de solutions le moins pessimiste. La fusion des deux résultats permet toutefois d'éliminer des solutions qui ne sont pas consistantes avec l'une ou l'autre des deux CSP.

3.4.2 Estimation ensembliste par la représentation polaire

La réponse fréquentielle du modèle défini par (3.3.1) est donnée par :

$$G_2(j\omega_n, \boldsymbol{\theta}) = |G_2(j\omega_n, \boldsymbol{\theta})| \exp^{j\varphi(\omega_n, \boldsymbol{\theta})}, \quad (3.4.11)$$

avec $|G_2(j\omega_n, \boldsymbol{\theta})|$ et $\varphi(\omega_n, \boldsymbol{\theta})$ représentent le gain et la phase de la réponse fréquentielle donnés respectivement par :

$$|G_2(j\omega_n, \boldsymbol{\theta})| = \frac{|k|}{\sqrt{\left(1 + \cos(\nu \frac{\pi}{2}) \left(\frac{\omega_n}{\omega_0}\right)^\nu \left(2\zeta + \left(\frac{\omega_n}{\omega_0}\right)^\nu\right)\right)^2 + \left(\sin(\nu \frac{\pi}{2}) \left(\frac{\omega_n}{\omega_0}\right)^\nu \left(2\zeta + \left(\frac{\omega_n}{\omega_0}\right)^\nu\right)\right)^2}}, \quad (3.4.12)$$

$$\varphi(\omega_n, \boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{\left(2\zeta \sin(\frac{\nu\pi}{2}) + \left(\frac{\omega_n}{\omega_0}\right)^\nu \sin(\nu\pi)\right)}{\text{Den}(\omega_n)}\right), & \text{si } \text{Den}(\omega_n) > 0, \\ -\pi - \arctan\left(\frac{\left(2\zeta \sin(\frac{\nu\pi}{2}) + \left(\frac{\omega_n}{\omega_0}\right)^\nu \sin(\nu\pi)\right)}{\text{Den}(\omega_n)}\right), & \text{si } \text{Den}(\omega_n) < 0, \end{cases} \quad (3.4.13)$$

avec $\text{Den}(\omega_n) = \left(\left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^\nu + 2\zeta \cos(\frac{\nu\pi}{2}) + \left(\frac{\omega_n}{\omega_0}\right)^\nu \cos(\nu\pi)\right)$.

Deux CSP sont utilisés pour l'estimation ensembliste par la représentation polaire. Un CSP réel, basé sur l'arithmétique des intervalles réels et la décomposition de la réponse fréquentielle complexe en deux parties, partie gain (3.3.13) et partie phase (3.4.13). Un CSP complexe, basé sur l'arithmétique des intervalles complexes et la réponse fréquentielle entière sans décomposition (3.4.11).

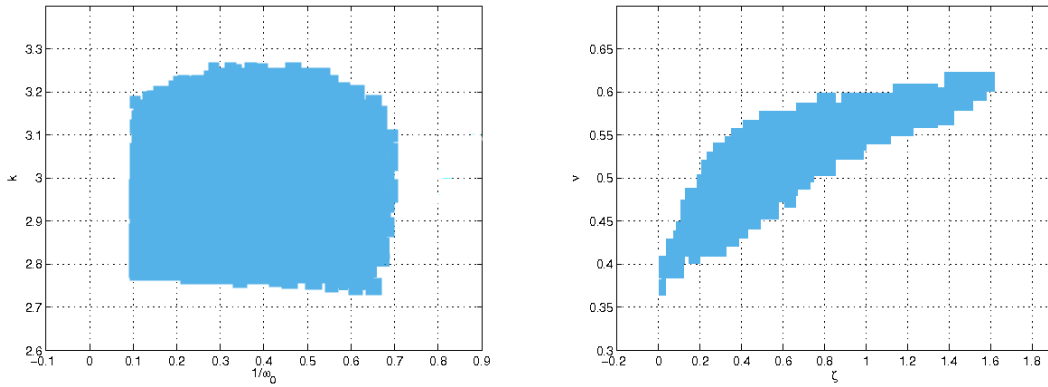
3.4.2.1 CSP réel pour l'estimation des paramètres du modèle de deuxième espèce

L'encadrement extérieur $\bar{\mathbb{S}}$ de l'ensemble de solutions du CSP réel est obtenu en utilisant le solveur QUIMPER. Il peut être inclus dans l'hypercube :

$$\left([k], [\zeta], \left[\frac{1}{\omega_0}\right], [\nu]\right) = ([2.72, 3.27], [0.00, 1.60], [0.10, 0.70], [0.36, 0.62]), \quad (3.4.14)$$

et projeté en 2D sur les figures 3.28(a) et 3.28(b).

La figure 3.29 montre que toutes les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\bar{\mathbb{S}}$ sont consistantes avec les intervalles d'incertitude permettant ainsi de valider le modèle ensembliste obtenu.



(a) Projection sur le plan $(k, \frac{1}{\omega_0})$ de l'ensemble de solutions obtenu (b) Projection sur le plan (ν, ζ) de l'ensemble de solutions obtenu

FIG. 3.28 – Projection en 2D de l'ensemble de solutions du CSP réel - représentation polaire

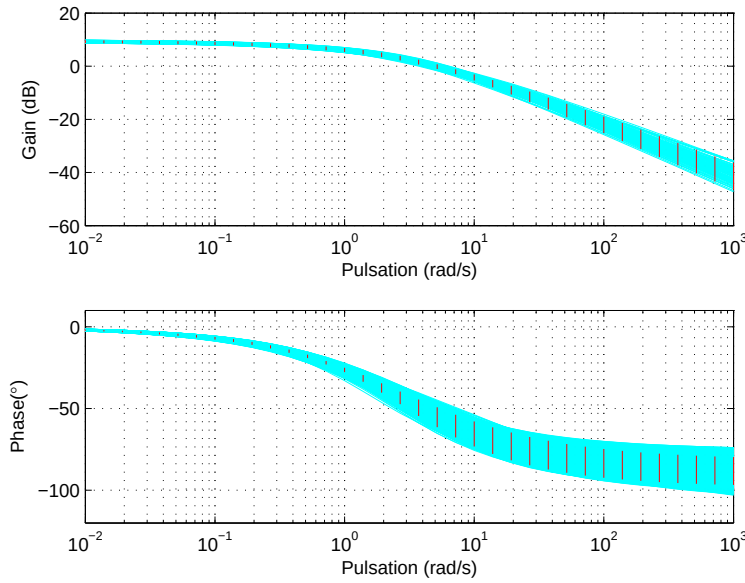


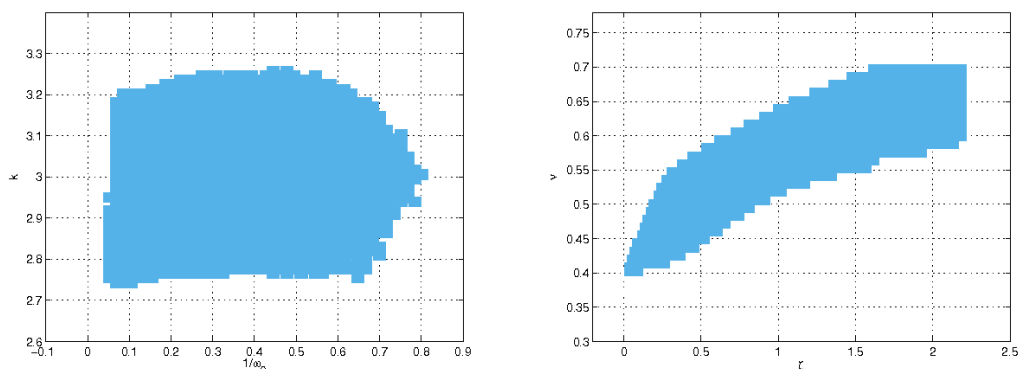
FIG. 3.29 – Diagramme de *Bode* des mesures incertaines (en rouge) et les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\bar{\mathbb{S}}$ du CSP réel (en vert) - représentation polaire

3.4.2.2 CSP complexe pour l'estimation des paramètres du modèle de deuxième espèce

L'encadrement extérieur $\bar{\mathbb{S}}$ de l'ensemble de solutions du CSP complexe est obtenu en utilisant la boîte à outils C-XSC. Il peut être inclus dans l'hypercube :

$$\left([k], [\zeta], \left[\frac{1}{\omega_0} \right], [\nu] \right) = ([2.73, 3.26], [0.01, 2.22], [0.04, 0.81], [0.40, 0.70]), \quad (3.4.15)$$

et projeté en 2D sur les figures 3.30(a) et 3.30(b).



(a) Projection sur le plan $(k, \frac{1}{w_0})$ de l'ensemble de solutions obtenu
(b) Projection sur le plan (n, ζ) de l'ensemble de solutions obtenu

FIG. 3.30 – Projection en 2D de l'ensemble de solutions CSP complexe - représentation polaire

La figure 3.31 montre que toutes les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\bar{\mathbb{S}}$ sont consistantes avec les intervalles d'incertitude permettant ainsi de valider le modèle ensembliste obtenu.

3.4.2.3 Comparaison entre le CSP réel et le CSP complexe sur la représentation polaire

Le tableau 3.5 présente les intervalles d'inclusion pour l'ensemble des solutions estimé pour chaque paramètre pour les deux CSP, réel et complexe, de la représentation polaire.

Paramètres	$[k]$	$[\zeta]$	$[\frac{1}{w_0}]$	$[\nu]$
CSP réel	[2.72, 3.27]	[0.00, 1.60]	[0.10, 0.70]	[0.36, 0.62]
CSP complexe	[2.73, 3.26]	[0.01, 2.22]	[0.04, 0.81]	[0.40, 0.70]
Inclusion polaire finale	[2.73, 3.26]	[0.01, 1.60]	[0.10, 0.70]	[0.40, 0.62]

TAB. 3.5 – Comparaison des CSP réel et complexe de la représentation polaire sur le modèle du deuxième espèce

A partir des figures 3.32(a) et 3.32(b), l'ensemble de solutions obtenu en utilisant le CSP complexe est plus pessimiste que l'ensemble de solutions obtenu en utilisant un CSP réel (figure 3.32(b)), même si sur quelques domaines le CSP complexe permet d'éliminer quelques solutions de l'ensemble final.

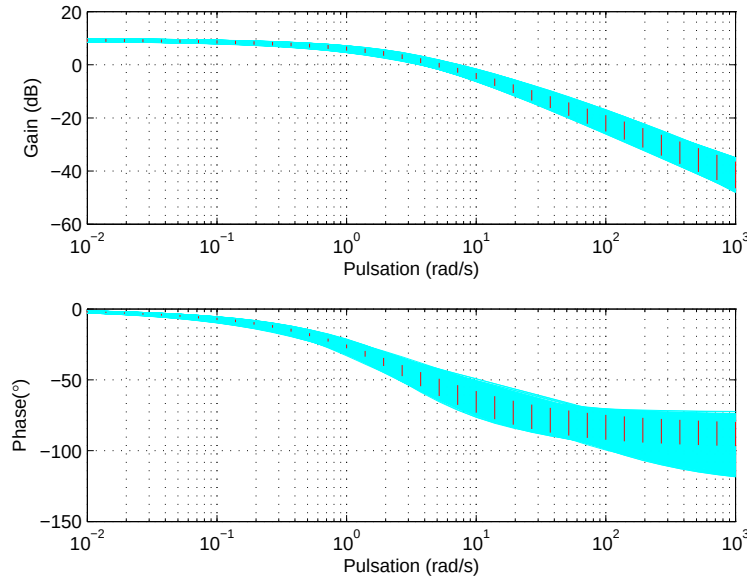
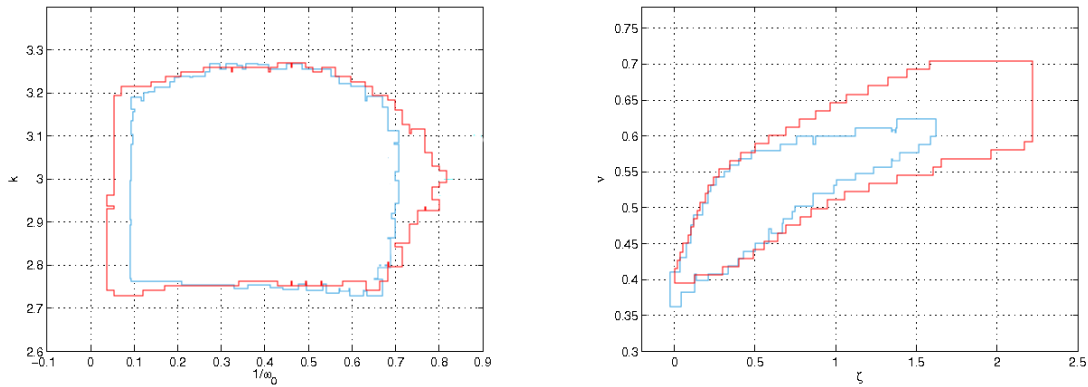


FIG. 3.31 – Diagramme de *Bode* des mesures incertaines (en rouge) et les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\bar{\mathbb{S}}$ du CSP complexe (en vert) - représentation polaire



(a) Projection sur le plan $(k, \frac{1}{\omega_0})$ de l'ensemble de solutions obtenu à partir du CSP réel (en bleu) et du CSP complexe (en rouge)

(b) Projection sur le plan (ν, ζ) de l'ensemble de solutions obtenu à partir du CSP réel (en bleu) et du CSP complexe (en rouge)

FIG. 3.32 – Comparaison des ensembles de solutions obtenus par les deux CSP projetés en 2D - représentation polaire

3.4.3 Estimation ensembliste par la représentation circulaire

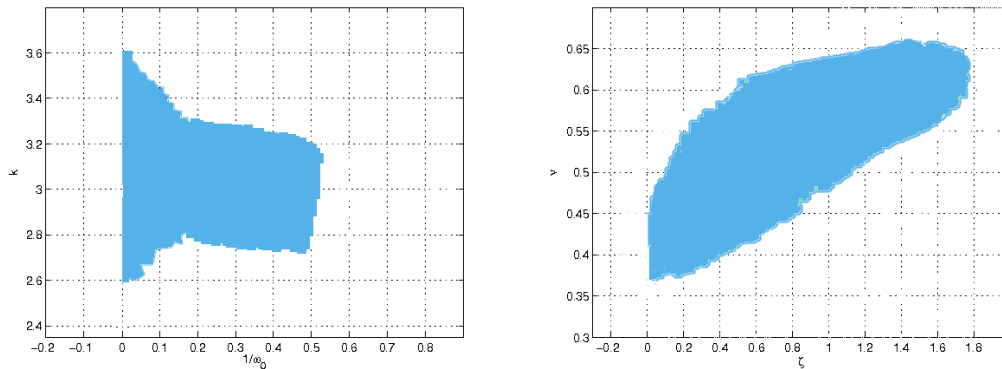
L'estimation ensembliste par la représentation circulaire est basée seulement sur le CSP complexe.

CSP complexe pour l'estimation des paramètres du modèle de deuxième espèce

L'encadrement extérieur $\bar{\mathbb{S}}$ de l'ensemble de solutions du CSP complexe est obtenu en utilisant la boîte à outil INTLAB. Il peut être inclus dans l'hypercube :

$$\left([k], [\zeta], \left[\frac{1}{\omega_0} \right], [\nu] \right) = ([2.60, 3.60], [0.00, 1.79], [0.00, 0.52], [0.36, 0.66]), \quad (3.4.16)$$

et projeté en 2D sur les figures 3.33(a) et 3.33(b).



(a) Projection sur le plan $(k, \frac{1}{w_0})$ de l'ensemble de solutions obtenu
(b) Projection sur le plan (n, ζ) de l'ensemble de solutions obtenu

FIG. 3.33 – Projection en 2D de l'ensemble de solutions du CSP complexe - représentation circulaire

La figure 3.34 montre que toutes les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\bar{\mathbb{S}}$ sont consistantes avec les cercles d'incertitude permettant ainsi de valider le modèle ensembliste obtenu.

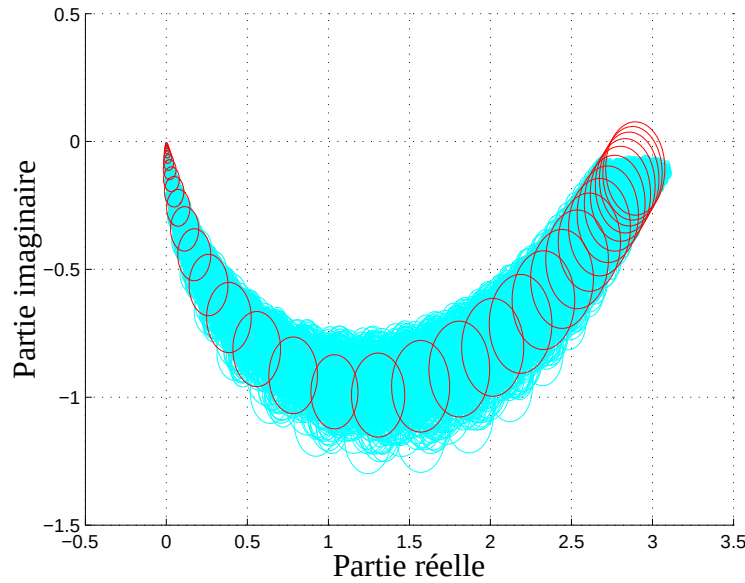


FIG. 3.34 – Diagramme de *Nyquist* des mesures incertaines (en rouge) et les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\bar{\mathbb{S}}$ du CSP complexe (en vert) - représentation circulaire

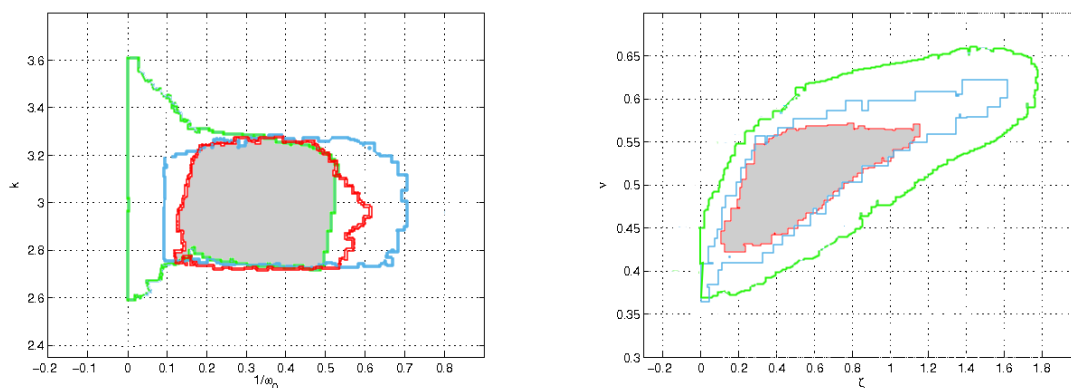
3.4.4 Fusion de l'ensemble des solutions

Fusionner l'ensemble de solutions revient, comme précédemment, à faire une intersection des ensembles de solutions issus des trois représentations. Par conséquent, chaque point ne faisant pas partie de l'intersection des trois ensembles est éliminé de l'ensemble final.

Le tableau 3.6 présente les intervalles d'inclusion pour chaque paramètre pour les trois représentations, ainsi que les intervalles d'inclusion finaux issus de l'opération de fusion.

Paramètres	$[k]$	$[\zeta]$	$[\frac{1}{\omega_0}]$	$[\nu]$
Inclusion rectangulaire	[2.77, 3.25]	[0.10, 1.16]	[0.14, 0.60]	[0.43, 0.57]
Inclusion polaire	[2.73, 3.26]	[0.01, 1.60]	[0.10, 0.70]	[0.40, 0.62]
Inclusion circulaire	[2.60, 3.60]	[0.00, 1.79]	[0.00, 0.52]	[0.36, 0.66]
Inclusion finale	[2.77, 3.26]	[0.10, 1.16]	[0.14, 0.52]	[0.43, 0.57]

TAB. 3.6 – Comparaison des intervalles d'inclusion des paramètres du modèle de deuxième espèce obtenus avec les trois représentations



(a) Projection sur le plan $(k, \frac{1}{w_0})$ des ensembles de solutions obtenus à partir des trois présentations : rectangulaire (trait rouge), polaire (trait bleu) et circulaire (trait vert)

(b) Projection sur le plan (ν, ζ) des ensembles de solutions obtenus à partir des trois présentations : rectangulaire (trait rouge), représentation polaire (trait bleu) et circulaire (trait vert)

FIG. 3.35 – Comparaison des ensembles de solutions obtenus par les trois représentations projetés en 2D - deuxième espèce

A travers les figures 3.19(a), 3.19(b), 3.35(a) et 3.35(b), nous constatons que chaque fonction d'inclusion introduit un pessimisme différemment. En faisant l'intersection des ensembles de solutions, un ensemble moins pessimiste est alors obtenu (la partie en gris).

3.5 Application à l'estimation ensembliste des paramètres d'un système de diffusion thermique dans un barreau d'aluminium

En diffusion thermique, plusieurs études ont montré que le modèle liant la densité de flux de chaleur à travers un barreau métallique à la température mesurée est non entier, car il découle de la résolution de l'équation de la chaleur (équation aux dérivées partielles) [?], [?], [?], [?], [?]. Dans ce paragraphe, une application sur un banc d'essai thermique est présentée et un modèle non entier est élaboré à partir d'une réponse fréquentielle. Cette réponse fréquentielle est obtenue suite à une identification non paramétrique. Les approches ensemblistes sont ensuite appliquées pour estimer un ensemble de modèles faisables au lieu d'un modèle unique.

3.5.1 Description du banc d'essai

Le banc d'essai est constitué, comme le montre la figure 3.36, d'un barreau cylindrique en aluminium de rayon 1cm et de longueur de 40cm, soumis à une résistance chauffante de 4.8Ω à une extrémité et isolé thermiquement par une mousse (figure 3.37) permettant ainsi d'assurer une diffusion unidirectionnelle du flux de chaleur.

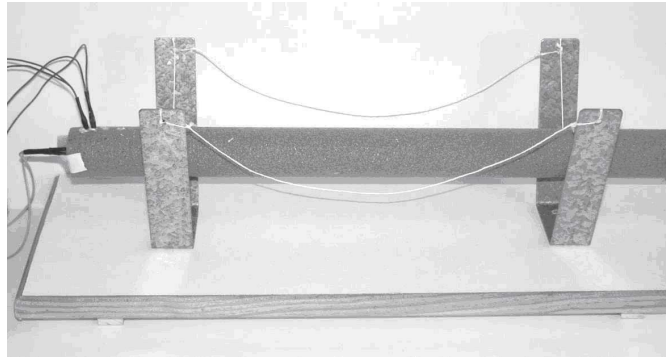


FIG. 3.36 – Photographie d'un système thermique isolé équipé d'une résistance chauffante et des sondes de mesures

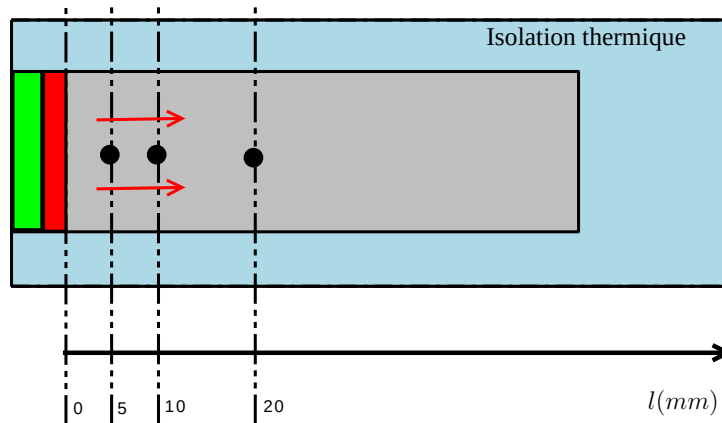


FIG. 3.37 – Schéma du barreau en aluminium isolé (section - bleu), résistance chauffante (rouge), isolation de la résistance (vert)

Le signal d'entrée est le flux de chaleur ϕ généré par la résistance chauffante et commandé par ordinateur au travers d'un transistor "on-off" avec une amplitude de tension contrôlée. Le signal de sortie est la température $T(l, t)$ mesurée à une distance $l = 5mm$ de l'extrémité chauffée par une sonde platine et un amplificateur dont l'erreur de quantification est de $0.125^\circ C$.

La conductivité et la diffusivité thermiques de l'aluminium sont données respectivement par $\lambda = 237 W.m^{-1}.K^{-1}$ et $\alpha = 9975 \times 10^{-8} m^2.s^{-1}$, S étant la section du barreau $S = 3.14 cm^2$.

3.5.2 Identification du barreau thermique

L'objectif est de modéliser la température mesurée en fonction du flux de chaleur injecté à partir de données expérimentales. Le signal d'entrée est représenté par une SBPA appliquée autour d'un point d'équilibre correspondant à un flux de $5 kW.m^{-2}$.

Victor [?] a montré que le barreau n'est pas parfaitement isolé et que l'énergie injectée compense les pertes thermiques. Par conséquent l'essai est effectué après avoir atteint le régime permanent obtenu en appliquant un échelon de flux de $5 kW.m^{-2}$. La température mesurée, à une distance $l = 5 mm$ de l'extrémité chauffée du barreau, est tracée sur la figure 3.38.

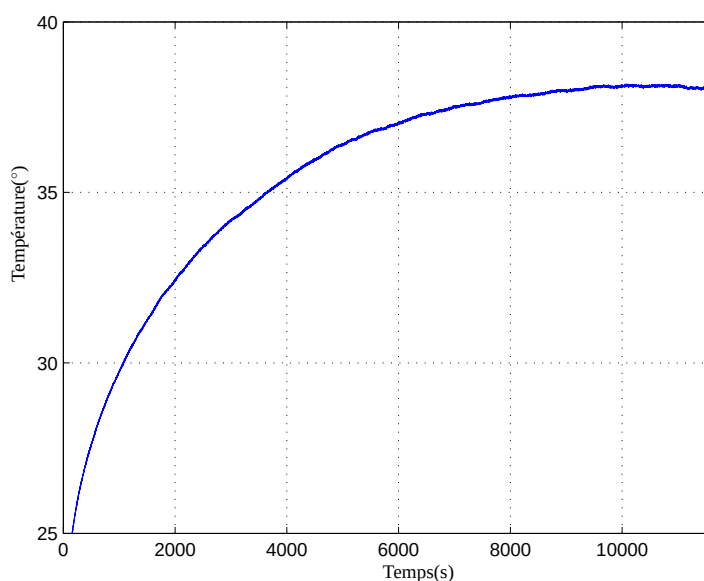


FIG. 3.38 – Réponse du barreau thermique pour un échelon de flux d'amplitude $5 kW.m^{-2}$

Après avoir atteint le régime permanent, une SBPA d'amplitude comprise entre 0 et $10 kW.m^{-2}$ est appliquée en entrée. Les composantes continues sont retranchées des signaux d'entrée et de sortie. Par conséquent, le signal d'entrée utilisé pour la modélisation est une SBPA centrée autour de 0 et ayant une amplitude de $\pm 5 kW.m^{-2}$. La SBPA appliquée et la température mesurée sont tracées sur la figure 3.39. Un retard de quatre échantillons correspondant à 2s ayant été remarqué, les signaux d'entrées/sorties ont été recalés en conséquence.

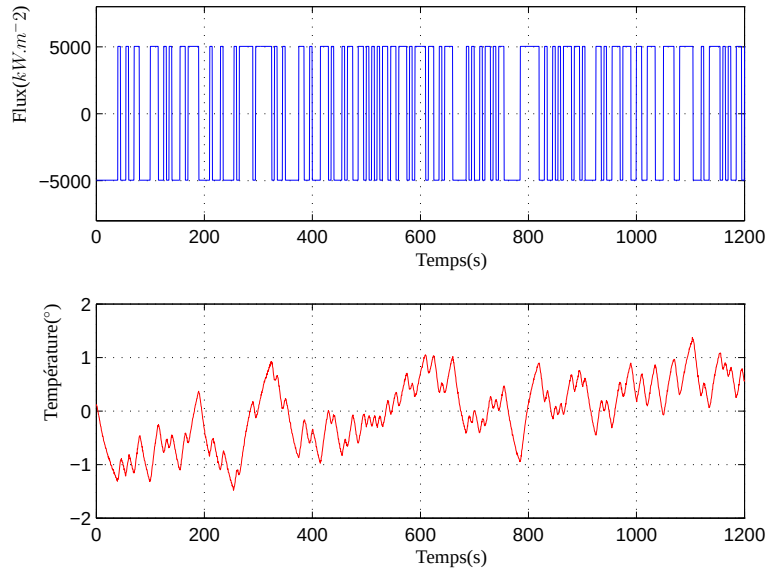


FIG. 3.39 – Signaux d'entrée/sortie du banc d'essai thermique

3.5.2.1 Identification non paramétrique de la réponse fréquentielle

Le calcul du rapport de l'estimée de la densité spectrale croisée sortie-entrée $\hat{G}_{yu}$ sur l'estimée de la densité spectrale de l'entrée $\hat{G}_{uu}$ permet d'obtenir la réponse fréquentielle [?] :

$$\hat{G}(j\omega) = \frac{\hat{G}_{yu}(j\omega)}{\hat{G}_{uu}(j\omega)}. \quad (3.5.1)$$

Le gain et la phase de $\hat{G}(j\omega)$ sont tracés sur la figure 3.40.

3.5.2.2 Estimation paramétrique d'un modèle de type boîte noire

L'objectif est d'estimer les paramètres d'un modèle qui représente au mieux la réponse fréquentielle du barreau thermique. Cette estimation est basée sur la minimisation d'un critère quadratique fréquentiel pondéré entre l'erreur sur le gain et sur la phase :

$$J_{\%}(\theta) = \alpha J_G + (1 - \alpha) J_{\phi}, \quad (3.5.2)$$

avec

$$J_{G\%} = \frac{\sum_{n=1}^N \left(|\hat{G}(j\omega_n)|_{dB} - |\hat{\hat{G}}(j\omega_n)|_{dB} \right)^2}{\sum_{n=1}^N \left(|\hat{G}(j\omega_n)|_{dB} \right)^2} \times 100, \quad (3.5.3)$$

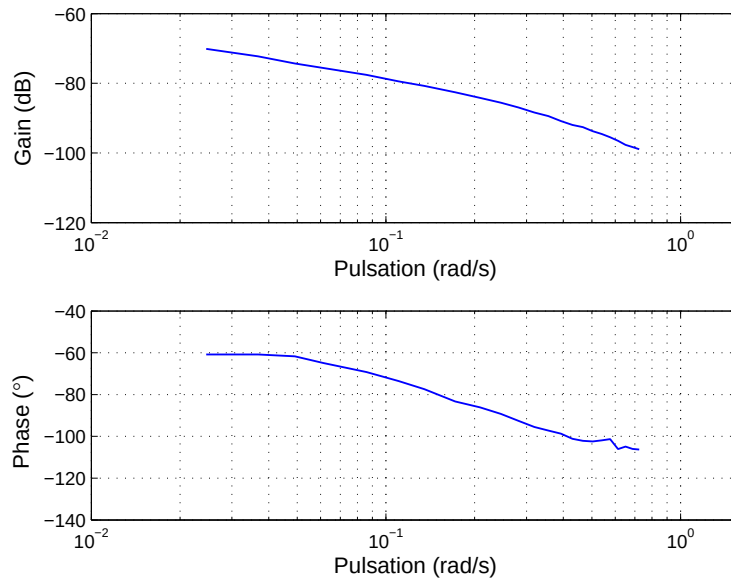


FIG. 3.40 – Gain et phase de la réponse fréquentielle du barreau thermique

et

$$J_{\phi\%} = \frac{\sum_{n=1}^N \left(\arg(\hat{G}(j\omega_n)) - \arg(\hat{\hat{G}}(j\omega_n)) \right)^2}{\sum_{n=1}^N \left(\arg(\hat{G}(j\omega_n)) \right)^2} \times 100, \quad (3.5.4)$$

où N représente le nombre total des fréquences, $\hat{G}(j\omega)$ la réponse fréquentielle estimée (3.5.1) et $\hat{\hat{G}}(j\omega_n)$ la réponse fréquentielle du modèle paramétrique non entier. Enfin, α représente un facteur de pondération choisi égale à 0.5 pour donner le même poids au gain et à la phase normalisés. Les paramètres sont estimés par la méthode du **simplex** de la toolbox *optimization* de Matlab.

Au final, le modèle optimal obtenu correspond à :

$$G(s) = \frac{k}{\frac{1}{p_1} \times s^{2\nu} + \frac{1}{p_2} s^\nu + 1} \exp^{-2s}, \quad (3.5.5)$$

avec

$$\begin{cases} k = 0.8 \times 10^{-3}, \\ p_1 = 1 \times 10^{-3}, \\ p_2 = 7.7 \times 10^{-3}, \\ \nu = 0.73. \end{cases} \quad (3.5.6)$$

Le critère d'erreur correspondant à ce modèle est de $J = 0.03\%$. La figure 3.41 représente les réponses fréquentielles du gain et de la phase du barreau thermique et du modèle paramétrique estimé. On constate une bonne concordance entre les deux.

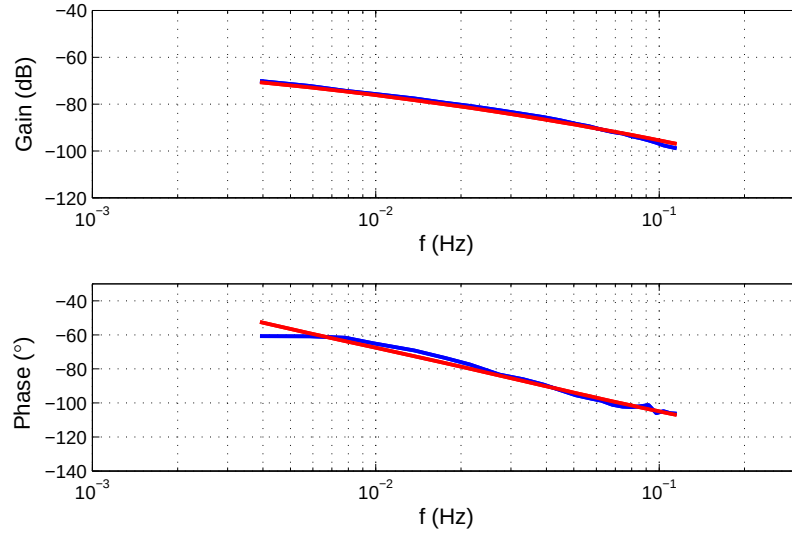


FIG. 3.41 – Gain et phase de la réponse fréquentielle du barreau thermique (en bleu) et du modèle paramétrique (en rouge)

3.5.2.3 Prise en compte des incertitudes

L'estimation de la réponse fréquentielle est généralement entachée d'erreurs dues au calcul des densités spectrales, au bruit de mesure, aux non-linéarités du système, au type de fenêtre utilisé, au degré de recouvrement des fenêtres, ... etc [?], [?]. L'estimation de l'écart-type sur le gain, $\sigma[|\hat{G}|]$, est donnée par :

$$\frac{\sigma[|\hat{G}|]}{|\hat{G}|} \approx \frac{(1 - \gamma_{uy}^2)^{1/2}}{|\gamma_{uy}| \sqrt{2n_d}}, \quad (3.5.7)$$

et l'estimation de l'écart-type sur la phase, $\sigma[\hat{\varphi}]$ avec $\varphi = \arg(G)$, est donnée par :

$$\sigma[\hat{\varphi}] \approx \frac{(1 - \gamma_{uy}^2)^{1/2}}{|\gamma_{uy}| \sqrt{2n_d}}, \quad (3.5.8)$$

où γ_{uy}^2 , est la *fonction de cohérence*, qui caractérise la relation entrée-sortie. Elle est définie pour chaque pulsation ω par :

$$\gamma_{xy}^2(\omega) = \frac{|\hat{G}_{uy}(j\omega)|^2}{\hat{G}_{xx}(j\omega)\hat{G}_{yy}(j\omega)}, \quad (3.5.9)$$

où $\hat{G}_{yy}(j\omega)$ représente l'estimation de la densité spectrale de puissance de la sortie. Pour chaque pulsation ω , la fonction de cohérence varie entre 0 et 1 selon la dépendance de la sortie à l'entrée :

$$0 \leq \gamma_{xy}^2(\omega) \leq 1 \quad \forall \omega. \quad (3.5.10)$$

Si les signaux temporels $u(t)$ et $y(t)$ sont totalement indépendants $\gamma_{xy}^2(\omega)$ tend vers zéro et s'ils sont très dépendants, $\gamma_{xy}^2(\omega)$ tend vers 1.

L'objectif est donc d'estimer le gain et la phase ainsi que leurs intervalles de confiance à ± 3 écarts-types permettant de garantir à 99% que les réponses fréquentielles sont comprises dans cet intervalle.

$$|\hat{G}| - 3\sigma[|\hat{G}|] \leq |G| \leq |\hat{G}| + 3\sigma[|\hat{G}|], \quad (3.5.11)$$

$$\hat{\varphi} - 3\sigma[\hat{\varphi}] \leq |\varphi| \leq \hat{\varphi} + 3\sigma[\hat{\varphi}]. \quad (3.5.12)$$

La prise en compte des intervalles de confiance (3.5.7) et (3.5.8), permet d'obtenir une borne inférieure et une borne supérieure sur le gain et sur la phase en chaque fréquence ω (figure 3.42).

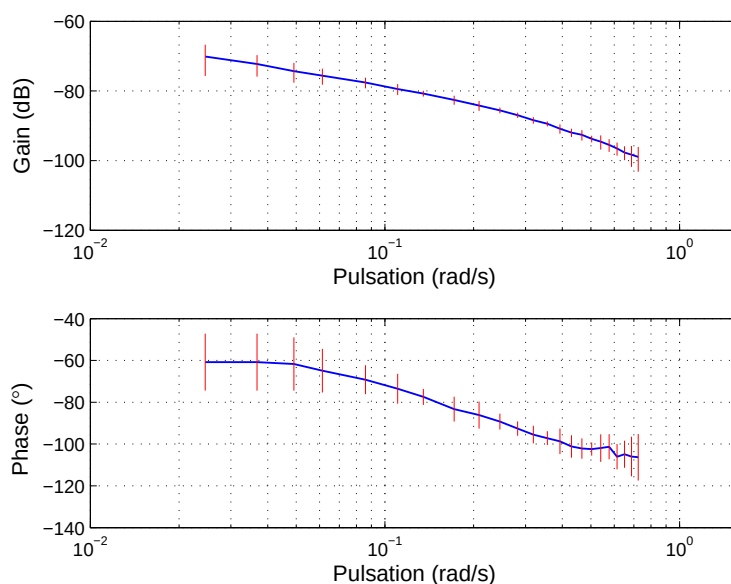


FIG. 3.42 – Gain et phase de la réponse fréquentielle du barreau thermique en bleu et intervalles de confiance à 3 écarts-types en rouge

3.5.2.4 Estimation ensembliste

L'objectif est maintenant de trouver l'ensemble de paramètres faisables pour le modèle non entier décrit par (3.5.5). Le CSP à résoudre est donné par (3.2.7), et l'ensemble $\mathbb{S}$ de solutions est donné par

$$\mathbb{S} = \{\boldsymbol{\theta} \in \Theta \mid f(\omega_n, \boldsymbol{\theta}) \in [y(\omega_n)], \forall n \in \{1, \dots, N\}\}. \quad (3.5.13)$$

avec $\boldsymbol{\theta} = [[k], [p_1], [p_2], [\nu]]$ le vecteur de paramètres à estimer, $f(\omega_n, \boldsymbol{\theta})$ et $[y(\omega_n)]$ ayant été définies dans (3.2.13).

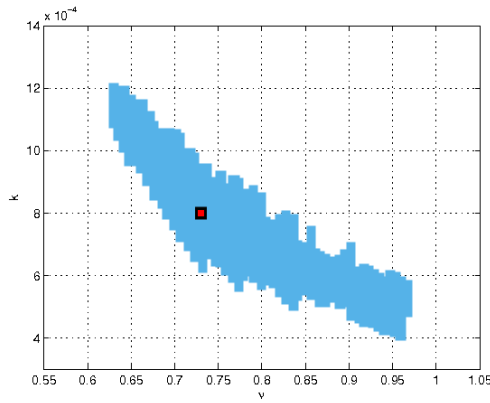
L'espace initial de recherche du vecteur des paramètres du modèle de deuxième espèce est :

$$([k], [p_1], [p_2], [\nu]) = ([0.00, 5.00], [0.00, 5.00], [0.00, 5.00], [0.00, 2.00]). \quad (3.5.14)$$

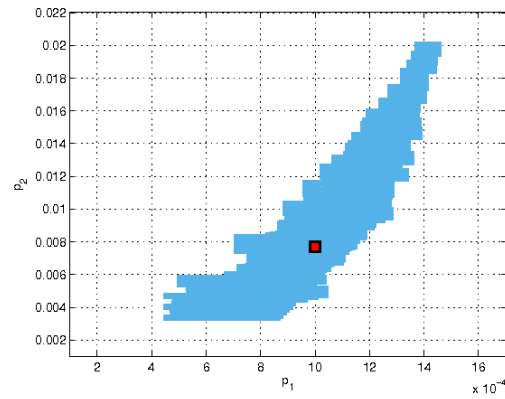
L'encadrement extérieur $\bar{\mathbb{S}}$ de l'ensemble de solutions obtenu en utilisant le solveur QUIMPER, peut être inclus dans le cube :

$$([k], [p_1], [p_2], [\nu]) = ([4.00, 12] \times 10^{-4}, [4.5, 15] \times 10^{-4}, [0.3, 2] \times 10^{-2}, [0.62, 0.97]), \quad (3.5.15)$$

et projeté en 2D sur les figures 3.43(b) et 3.43(b). Les paramètres estimés (3.5.6) sont à l'intérieur de l'ensemble de solutions obtenu (points en rouge).



(a) Projection sur le plan (k, ν) de l'ensemble de solutions obtenu



(b) Projection sur le plan (p_1, p_2) de l'ensemble de solutions obtenu

FIG. 3.43 – Projection en 2D de l'ensemble de solutions obtenu

La figure 3.44 montre que toutes les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\bar{\mathbb{S}}$ sont consistantes avec les intervalles d'incertitude permettant ainsi de valider le modèle ensembliste obtenu.

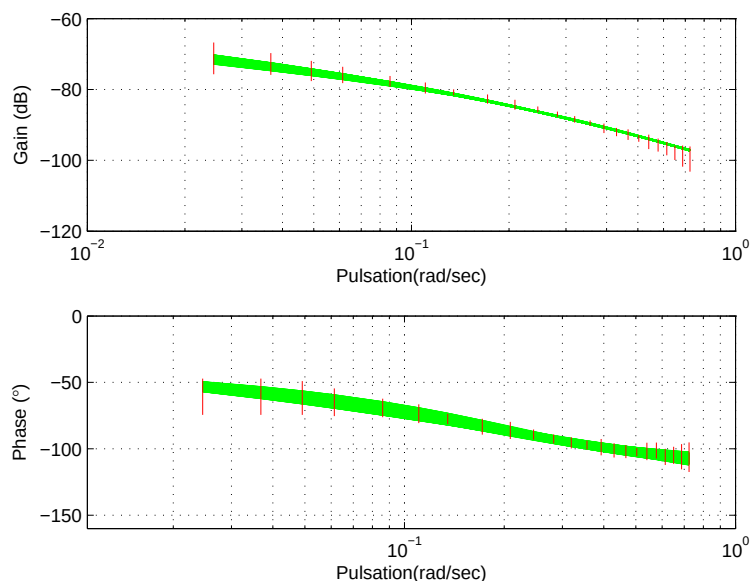


FIG. 3.44 – Diagramme de *Bode* des mesures incertaines (en rouge) et les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\bar{\mathbb{S}}$ (en vert)

3.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à l'estimation ensembliste des paramètres d'un modèle non entier à partir de données fréquentielles incertaines. Des exemples d'application des fonctions de transfert élémentaires de première et de deuxième espèce ont été présentés. La contribution principale de ce chapitre a consisté à estimer tous les paramètres des fonctions de transfert non entières, y compris les ordres de dérivation, utilisant les représentations rectangulaire, polaire et circulaire ainsi que des CSP réels et complexes. Il a été démontré que la fusion de l'ensemble des résultats obtenus pour chaque représentation, conduit à un ensemble de solutions plus petit.

Un système de diffusion thermique dans un barreau d'aluminium a été utilisé pour mettre en application la méthode d'estimation paramétrique d'un modèle non entier. A cet effet, une estimation non paramétrique a d'abord permis de convertir des données temporelles en données fréquentielles ; puis d'estimer l'erreur due à la conversion temps-fréquence à 3 écarts-types permettant ainsi d'obtenir les bornes inférieures et supérieures sur les mesures du gain et de la phase en chaque fréquence. Une estimation ensembliste a ensuite été appliquée en utilisant un CSP réel et a permis d'obtenir l'ensemble des paramètres du modèle non entier sous la forme d'intervalles.

Chapitre 4

Modélisation entière et non entière de la dynamique du conducteur par approche classique et ensembliste

Sommaire

4.1	Introduction	129
4.2	Présentation du dispositif expérimental	130
4.2.1	Fauteuil instrumenté	130
4.2.2	Fonctionnement	132
4.3	Modélisation boîte blanche de la dynamique du conducteur en cas de re- jet de perturbation - approche classique	133
4.3.1	Modèle biomécanique entier du conducteur	134
4.3.2	Modèle biomécanique non entier du conducteur	140
4.3.3	Identification non paramétrique de la réponse fréquentielle	141
4.3.4	Estimation paramétrique des modèles biomécaniques	142
4.4	Modélisation boîte blanche de la dynamique du conducteur en cas de re- jet de perturbation - approche ensembliste	146
4.4.1	Formulation du problème d'estimation ensembliste	148
4.4.2	Résolution du problème d'estimation ensembliste	148
4.5	Modélisation boîte noire de la dynamique du conducteur en suivi de tra- jectoire - approche ensembliste	153
4.5.1	Identification non paramétrique de la réponse fréquentielle	154
4.5.2	Estimation paramétrique d'un modèle de type boîte noire	155
4.5.3	Modélisation non entière par approche ensembliste	157

4.6 Conclusion	160
---------------------------------	------------

4.1 Introduction

Le nombre d'études concernant l'interaction homme-machine est en progression, notamment dans le secteur de l'automobile [?], [?], [?], [?], [?] et [?]. En effet, le développement des lois de commande permettant de garantir la sécurité du conducteur et du véhicule ont gagné de l'importance, d'où la nécessité de se focaliser de plus en plus sur le comportement du conducteur. Parmi les limites observées dans ce cadre, les retards liés à la perception de l'information, à son traitement et à sa transmission occupent une place importante. Par ailleurs, la capacité de l'être humain à pré-visualiser une scène aide à réduire le temps de réponse (le canal visuel représente 90% des informations reçues par le conducteur [?]). Cependant, dans le cas où la prévisualisation n'est pas possible comme lors d'une rafale de vent, d'autre sens interviennent à la place de la vision. Des études en simulateur ont montré que l'être humain est sensible aux mouvements de son corps à travers l'accélération, la vitesse et le déplacement. De plus, les informations tactiles sont surtout ressenties à travers le volant [?], [?], les pédales de frein et d'accélérateur, le siège, le levier de vitesse ...etc. Le retour d'effort volant est particulièrement utile pour le conducteur pour détecter les changements d'adhérence pneu/route et avoir un ressenti global de son véhicule. Enfin, l'audition est plus utilisée lorsqu'il y a une somme importante d'informations à traiter. Dans certaines études, le temps de réponse auditif est aussi faible que le temps de réponse du canal visuel. C'est dans ce contexte que s'inscrivent les travaux présentés dans ce chapitre. Plus précisément, ils concernent la modélisation de la dynamique de la boucle du conducteur [?], [?], l'objectif étant de disposer à terme d'une bibliothèque de modèles utilisable dans le cadre du Contrôle Global du Châssis (CGC) et éventuellement de détecter des comportements anormaux de conducteurs.

Après une présentation du banc d'essai expérimental au paragraphe 4.2, deux démarches méthodologiques sont développées dans ce chapitre. La première, présentée au paragraphe 4.3, s'inspire des travaux d'une équipe de l'Université Technologique de Delft aux Pays-Bas [?], [?], [?], composée d'automaticiens, de neurologues et de biomécaniciens. Cette démarche est basée sur une modélisation de type boîte blanche de la dynamique du conducteur en rejet de perturbation, où le conducteur soumis à des perturbations de type rafale de vent tente de les annuler. L'introduction de la dérivée non entière, pour la modélisation de phénomène visco-élastique, permet d'améliorer le critère d'estimation. De plus, les études sur un, voire plusieurs, individu(s) montrent que les réactions (ou réponses) recueillies ne sont jamais identiques. Elles varient, non seulement d'un conducteur à l'autre, mais aussi d'une expérience à l'autre pour le même conducteur. Il est alors préférable de rechercher un ensemble de modèles faisables d'un, voire plusieurs, conducteur(s) plutôt qu'un modèle unique. Une approche ensembliste est alors

adoptée au paragraphe 4.4. Dans la mesure où une modélisation de type boîte blanche introduit un grand nombre de paramètres, la seconde démarche méthodologique présentée au paragraphe 4.5 est basée sur une modélisation de type boîte noire de la dynamique du conducteur en suivi de trajectoire où le conducteur minimise l'écart entre une trajectoire de consigne, projetée à l'écran, et l'angle au volant. Cette modélisation permet de diminuer significativement le nombre de paramètres et d'appliquer plus facilement les algorithmes d'estimation ensemblistes développés au chapitre 3.

4.2 Présentation du dispositif expérimental

4.2.1 Fauteuil instrumenté

Le dispositif expérimental est un fauteuil instrumenté constitué de cinq parties (figure 4.1) :

- un siège de voiture monté sur un châssis support,
- un bloc volant avec, notamment, un servomoteur *brushless* pour le retour d'effort actif ;
- un bloc pédale de frein avec, là aussi, un servomoteur *brushless* pour le retour d'effort actif ;
- une partie informatique pour la gestion de l'ensemble ;
- une partie visualisation.

Chaque servomoteur dispose d'un variateur électronique comportant différentes boucles locales de régulation toutes paramétrables. La partie visualisation est gérée par un PC, appelé PC HOST. Elle est composée d'un écran et d'un vidéoprojecteur. Les informations délivrées par les capteurs de position arrivent en temps réel sur un PC, appelé PC TARGET, qui les transmet par réseau au PC HOST avec une rapidité suffisante pour ne pas percevoir de décalage entre la visualisation et la position réelle. Ce dispositif permet donc de reproduire (figure 4.2) :

- le retour visuel grâce à la présence d'un écran sur lequel apparaissent en superposition les positions de référence du volant et/ou de la pédale et les positions mesurées qui résultent de l'action du conducteur sur le volant et/ou la pédale ;
- le retour proprioceptif grâce à la présence de Lois de Retours d'Effort (LRE) au volant et à la pédale. L'affichage de la consigne peut se faire avec ou sans prévisualisation du futur.

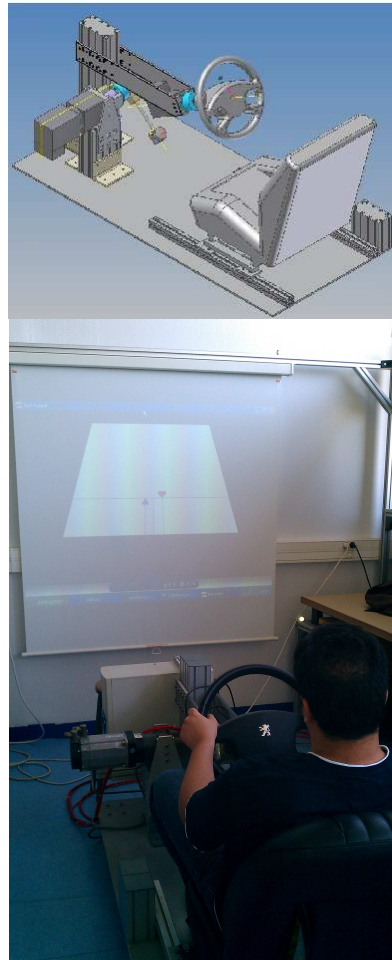


FIG. 4.1 – Vues d'ensemble du fauteuil instrumenté

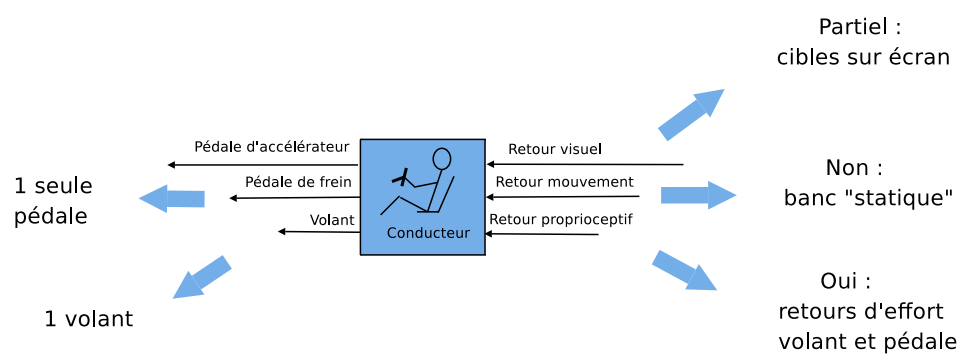


FIG. 4.2 – Illustration du potentiel du fauteuil instrumenté

4.2.2 Fonctionnement

Le schéma fonctionnel de la figure 4.3 résume le fonctionnement du dispositif expérimental.

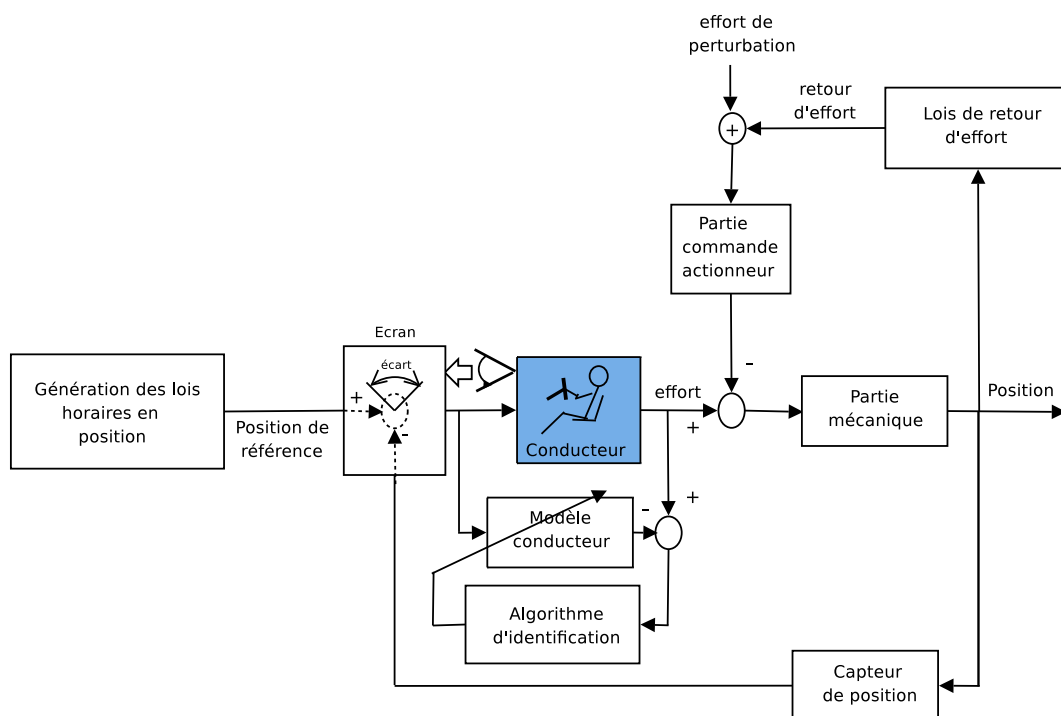


FIG. 4.3 – Schéma fonctionnel du fauteuil instrumenté

Ainsi, le conducteur cherche à minimiser l'écart entre la position de référence et la position mesurée en appliquant un effort (un couple sur le volant ou une force sur la pédale). A cet effort conducteur s'oppose un effort développé par un moteur électrique. Deux catégories d'essais existent, à savoir :

- rejet de perturbation, et
- suivi de trajectoire.

Dans le premier cas, la position de référence est fixe (angle volant nul par exemple qui se traduit par une ligne droite sur l'écran) et le moteur génère un couple image d'une perturbation exogène qui se superpose à une loi de retour d'effort. Dans le second cas, la position de référence varie dans le temps (consigne harmonique, indicielle, rectangulaire, etc). Dans les deux cas, la nature du signal de couple est telle que l'hypothèse de petites variations est vérifiée. C'est la raison pour laquelle l'utilisation de modèles biomécanique et neurophysiologique linéaires a été validée par de nombreux travaux sur le sujet [?], [?], [?].

La figure 4.4 présente le schéma fonctionnel du dispositif vu de la partie commande, celle-ci comportant deux parties. La première concerne la commande en couple $c_u(t)$, le résultat de la superposition du couple de perturbation $c_0(t)$ et du couple $c_{LRE}(t)$ issu de la LRE, elle même fonction de la position mesurée $\theta_v(t)$ du volant. Les boucles locales de régulation du servomoteur *brushless* sont traitées par le variateur électronique (bloc Commande en couple figure 4.4). La seconde partie concerne la génération des trajectoires de référence volant $\theta_{vref}(t)$ projetée sur écran.

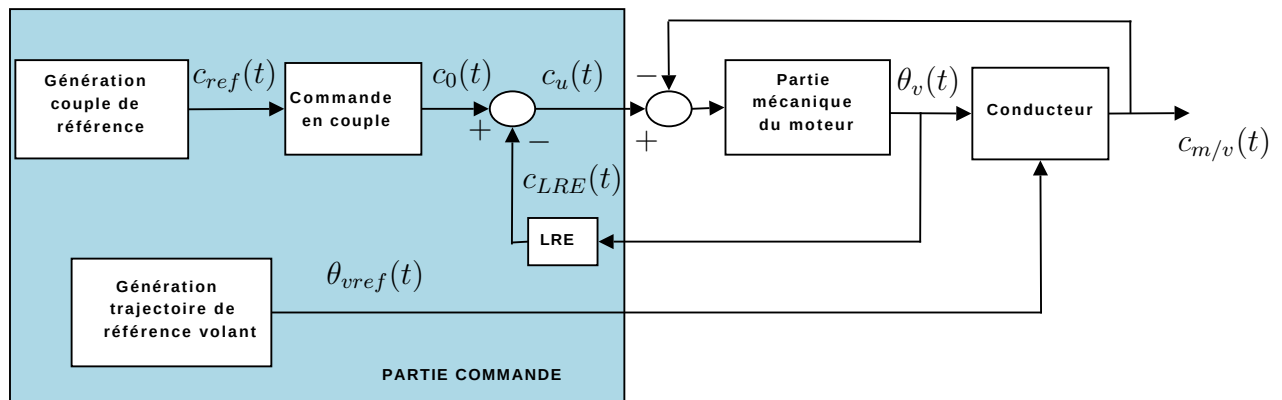


FIG. 4.4 – Schéma fonctionnel du dispositif vu de la partie commande

4.3 Modélisation boîte blanche de la dynamique du conducteur en cas de rejet de perturbation - approche classique

Deux mécanismes apparaissent [?] pour rejeter la perturbation et maintenir la position de référence :

- le premier est dû aux caractéristiques intrinsèques des bras telles que la masse, l'amortissement et la raideur. L'amortissement et la raideur dépendent des propriétés biomécaniques des tissus et des muscles ;
- le second est lié aux réflexes transmis par les tendons et les ligaments dans le cadre du retour proprioceptif et du retour visuel.

La figure 4.5 présente le schéma fonctionnel du bloc conducteur de la figure 4.4. Ce schéma, inspiré des travaux de [?], permet de formaliser les différentes relations de causalité qui interviennent au cours de ces deux mécanismes. Ainsi, afin de bien les identifier, un protocole expérimental comportant trois étapes est élaboré :

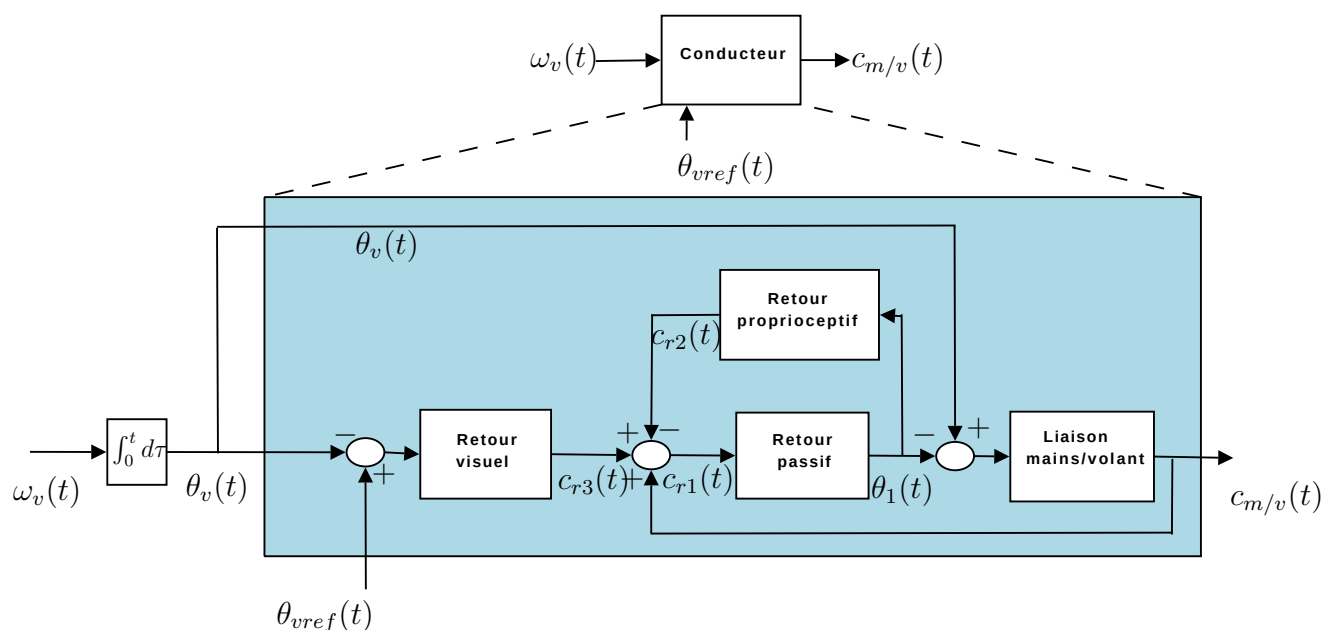


FIG. 4.5 – Schéma fonctionnel du bloc conducteur

- **identification du retour passif et de la liaison mains/volant** : lors de cette première étape, il est demandé à la personne testée de serrer les doigts pour maintenir une bonne liaison mains/volant tout en ayant les bras décontractés afin de ne pas réagir à la perturbation ;
- **identification du retour proprioceptif** : pendant cette deuxième étape, il est demandé à la personne testée de réagir uniquement à la perception du mouvement du volant en développant un couple qui s'oppose à la perturbation, et ce afin de minimiser le déplacement du volant. Le retour visuel n'intervient pas (les yeux sont fermés) ;
- **identification du retour visuel** : au cours de cette dernière étape, la personne testée cherche à annuler l'écart entre la position de référence et la position mesurée du volant en regardant l'écran placé devant elle, où ces deux grandeurs sont visualisées par deux curseurs.

4.3.1 Modèle biomécanique entier du conducteur

L'ensemble bras-volant-moteur est modélisé par un modèle à 2 degrés de liberté (2 ddl), présenté sur la figure 4.6 et utilisé dans la suite de ce chapitre. Le modèle est issu des travaux de [?]. Trois parties apparaissent distinctement. La partie électromécanique où J_{eq} (élément I) représente l'inertie équivalente de l'ensemble volant + moteur, b_{eq} (élément R) le coefficient de

frottement visqueux équivalent résultant des frottements au niveau du moteur. $u_m(t)$ désigne la tension de commande du moteur et $i(t)$ le courant dans l'induit. La partie liaison mains/volant est supposée viscoélastique de coefficient de frottement visqueux b_0 et de raideur k_0 conformément à [?]. En fait, il est difficile, lors de l'étape d'identification de la partie passive des bras, de maintenir à la fois une décontraction des bras et une liaison mains/volant parfaite par serrage des doigts qui se traduit alors par une contraction de l'avant-bras. Il existe donc un faible mouvement relatif des mains par rapport au volant. Enfin, la partie biomécanique où

- J_{bras} représente l'inertie équivalente des bras (élément I) par rapport à l'axe de rotation du volant ;
- b_{bras} le coefficient de frottement visqueux équivalent (élément R) des bras toujours par rapport à l'axe de rotation ;
- k_{bras} la raideur équivalente (élément C) des bras.

$\omega_1(t)$ représente la vitesse angulaire de l'inertie J_{bras} . Ces trois éléments I , R et C modélisent la partie passive des bras. La partie active est modélisée, quant à elle, par une source d'effort S_e matérialisée par un actionneur virtuel développant un couple résultant à la fois du retour proprioceptif et du retour visuel.

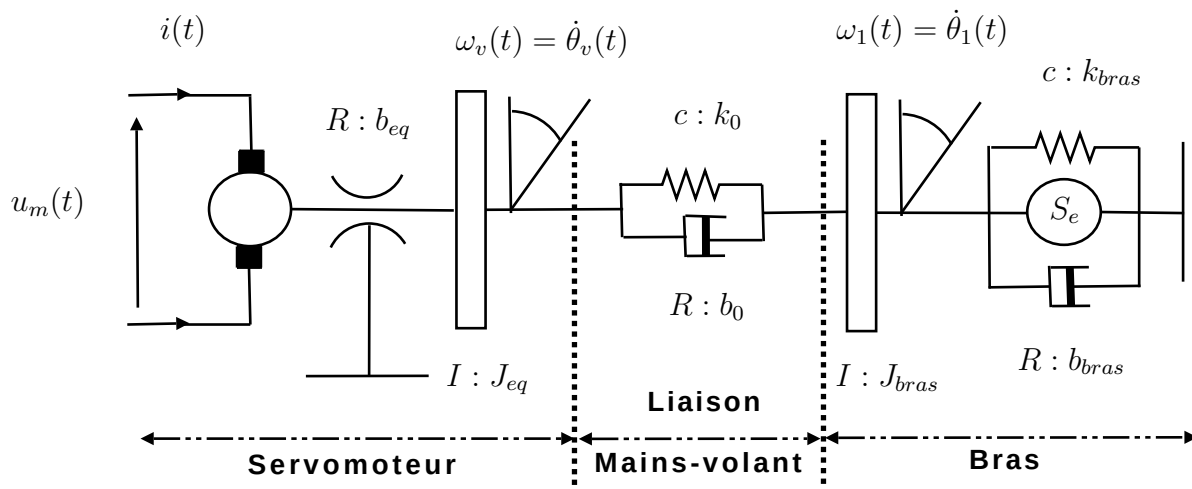


FIG. 4.6 – Modèle à 2 ddl de l'ensemble bras-volant-moteur, l'interface mains-volant étant modélisée par une liaison viscoélastique

4.3.1.1 Retour passif et liaison main volant

La figure 4.7 représente le schéma fonctionnel respectant les causalités intégrales de la partie biomécanique (retour passif de la figure 4.5).

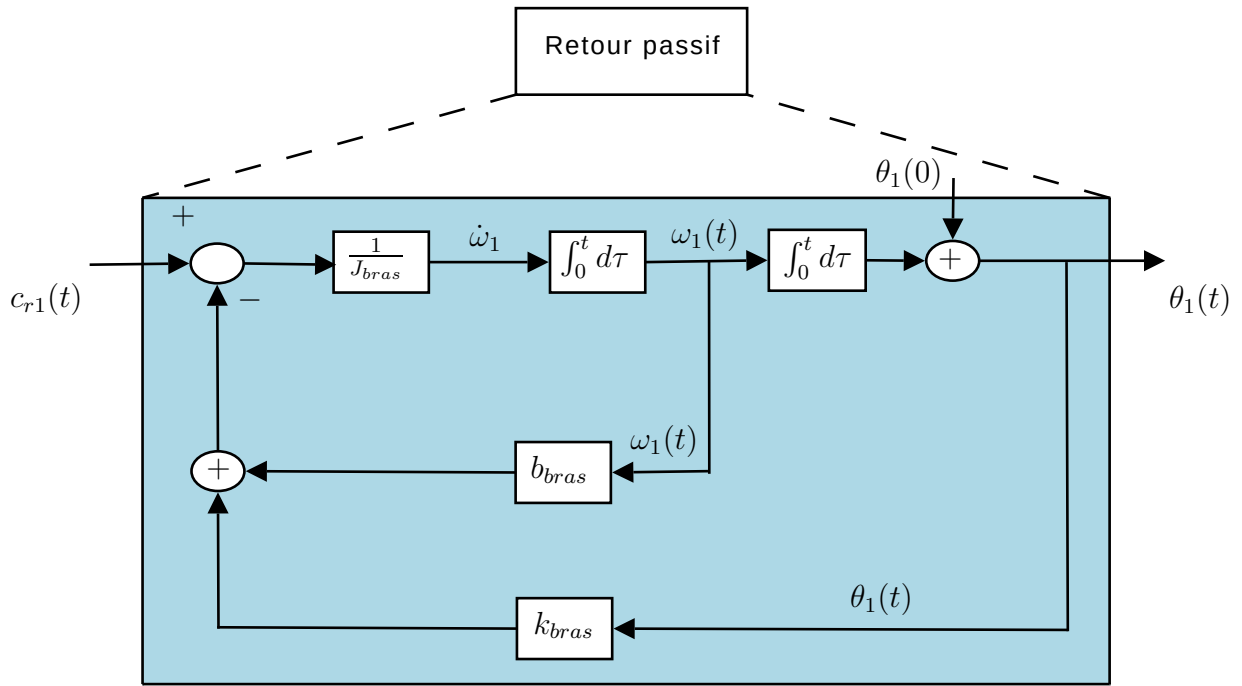


FIG. 4.7 – Schéma fonctionnel respectant les causalités intégrales de la partie retour passif de la figure 4.5

Sous l'hypothèse de conditions initiales nulles ($CI = 0$), le transfert $G_0(s)$ entre la position $\theta_1(t)$ et le couple $c_{r1}(t)$ est donné par :

$$G_0(s) = \frac{\theta_1(s)}{c_{r1}(s)} = \frac{1}{J_{bras}s^2 + b_{bras}s + k_{bras}}. \quad (4.3.1)$$

On retrouve donc l'inertie des bras, J_{bras} , ramenée à l'axe de rotation du volant, le coefficient de frottement visqueux, b_{bras} , et la raideur équivalente, k_{bras} , illustrés sur la figure 4.6.

La figure 4.8 représente le schéma fonctionnel respectant les causalités intégrales de la liaison mains/volant de la figure 4.5. Sous l'hypothèse de conditions initiales nulles ($CI = 0$), le transfert $G_1(s)$ entre le couple $c_{m/v}(t)$ et la différence de position $\theta_v(t) - \theta_1(t)$ est donné par :

$$G_1(s) = \frac{c_{m/v}(s)}{\theta_v(s) - \theta_1(s)} = b_0s + k_0. \quad (4.3.2)$$

On retrouve là aussi le coefficient de frottement visqueux b_0 et de raideur k_0 conformément à [?] et à la figure 4.6.

Enfin, la figure 4.9 présente le schéma fonctionnel du conducteur correspondant à la première étape du protocole expérimental.

Compte tenu du schéma de la figure 4.9 et des transferts $G_0(s)$ et $G_1(s)$, le transfert

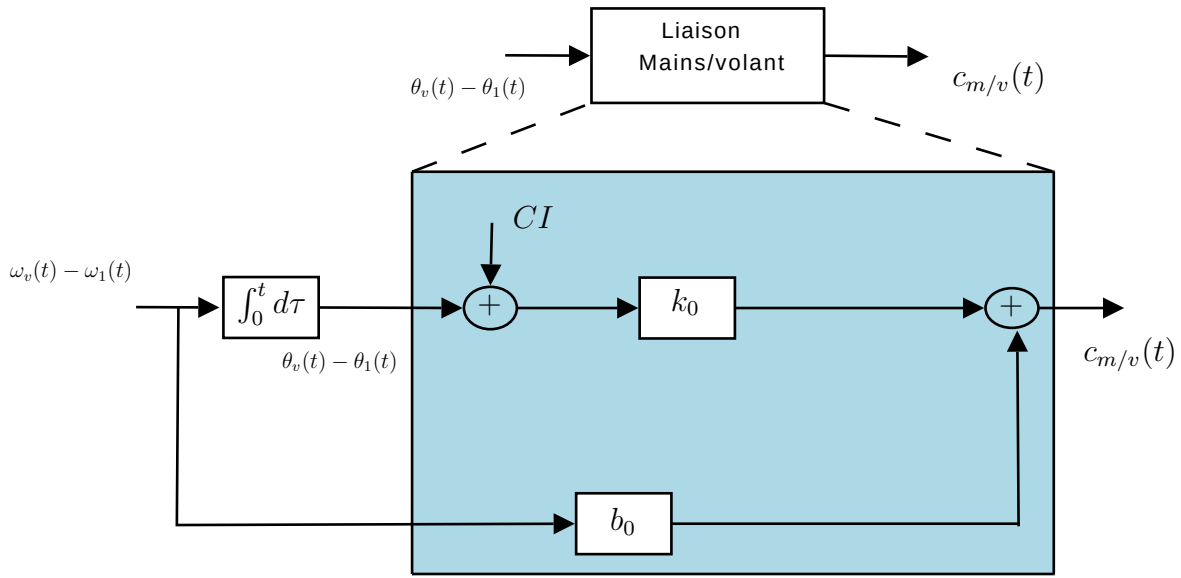


FIG. 4.8 – Schéma fonctionnel respectant les causalités intégrales de la liaison mains/volant de la figure 4.5

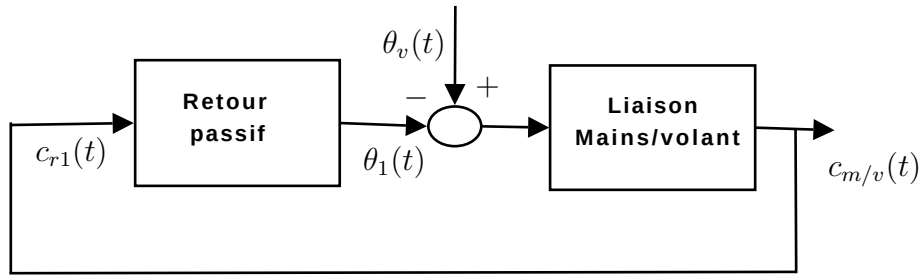


FIG. 4.9 – Schéma fonctionnel du conducteur correspondant à la première étape du protocole expérimental

biomécanique passif

$$G_E(s) = \frac{c_{m/v}(s)}{\theta_v(s)}, \quad (4.3.3)$$

est de la forme :

$$G_E(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)G_1(s)}, \quad (4.3.4)$$

soit en remplaçant $G_0(s)$ et $G_1(s)$ par leur expression respective :

$$G_E(s) = \frac{(b_0s + k_0)(J_{bras}s^2 + b_{bras}s + k_{bras})}{J_{bras}s^2 + (b_{bras} + b_0)s + (k_{bras} + k_0)}. \quad (4.3.5)$$

4.3.1.2 Retour proprioceptif

Le transfert $G_2(s)$ entre le couple $c_{r2}(t)$ en sortie du retour proprioceptif et la position $\theta_1(t)$ est donné par :

$$G_2(s) = \frac{c_{r2}(s)}{\theta_1(s)} = \exp^{-T_d s} \left(\frac{k_v s + k_p}{1 + \tau_a s} \right). \quad (4.3.6)$$

Ce modèle proposé dans [?] représente la partie neurophysiologique, il est composé de deux parties, la première correspondant à la dynamique réflexive, $G_r(s)$, et la deuxième à la dynamique d'activation des muscles, $G_{act}(s)$:

$$G_2 = G_r(s) \cdot G_{act}(s). \quad (4.3.7)$$

La dynamique réflexive est modélisée par un gain en vitesse k_v et en position k_p liés aux réflexes et un retard T_d qui représente le temps nécessaire pour la transmission et le traitement de l'information depuis le ressenti jusqu'à la réaction [?] :

$$G_r(s) = (k_v s + k_p) \exp^{-T_d s}. \quad (4.3.8)$$

La dynamique d'activation des muscles est modélisée, quant à elle, par un transfert de premier ordre avec une constante de temps τ_a :

$$G_{act}(s) = \frac{1}{1 + \tau_a s}. \quad (4.3.9)$$

La figure 4.10 présente le schéma fonctionnel du conducteur correspondant à la deuxième étape du protocole expérimental. Compte tenu de ce schéma et des transferts $G_0(s)$, $G_1(s)$ et

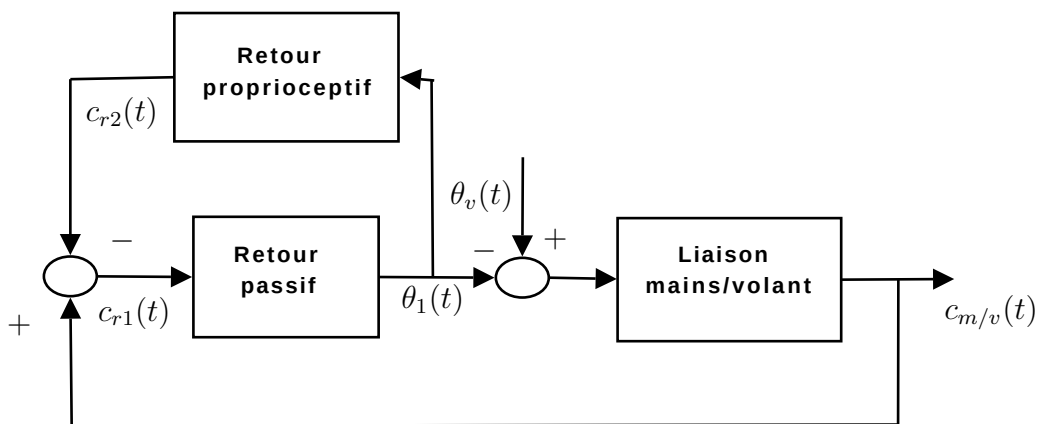


FIG. 4.10 – Schéma fonctionnel du conducteur correspondant à la deuxième étape du protocole expérimental

$G_2(s)$, le transfert biomécanique actif (en l'absence du retour visuel),

$$G'_E(s) = \frac{C_{m/v}(s)}{\theta_v(s)}, \quad (4.3.10)$$

devient :

$$G'_E(s) = \frac{G_0(s)}{1 + \frac{G_0(s)G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}}, \quad (4.3.11)$$

soit :

$$G'_E(s) = \frac{(b_2s + k_2) ((J_{bras}s^2 + b_{bras}s + k_{bras}) (1 + \tau_a s) + (k_v s + k_p) \exp^{-T_d s})}{(J_{bras}s^2 + b_{bras}s + k_{bras}) (1 + \tau_a s) + (b_2s + k_2) (1 + \tau_a s) + (k_v s + k_p) \exp^{-T_d s}}. \quad (4.3.12)$$

4.3.1.3 Retour visuel

Le transfert $G_3(s)$ entre le couple $c_{r3}(t)$ en sortie du retour visuel et la différence de position $\theta_{vref}(t) - \theta_v(t)$ est donné par :

$$G_3(s) = \frac{c_{r3}(s)}{\theta_{vref}(s) - \theta_v(s)}, \quad (4.3.13)$$

La figure 4.11 présente le schéma fonctionnel du conducteur correspondant à la troisième étape du protocole expérimental.

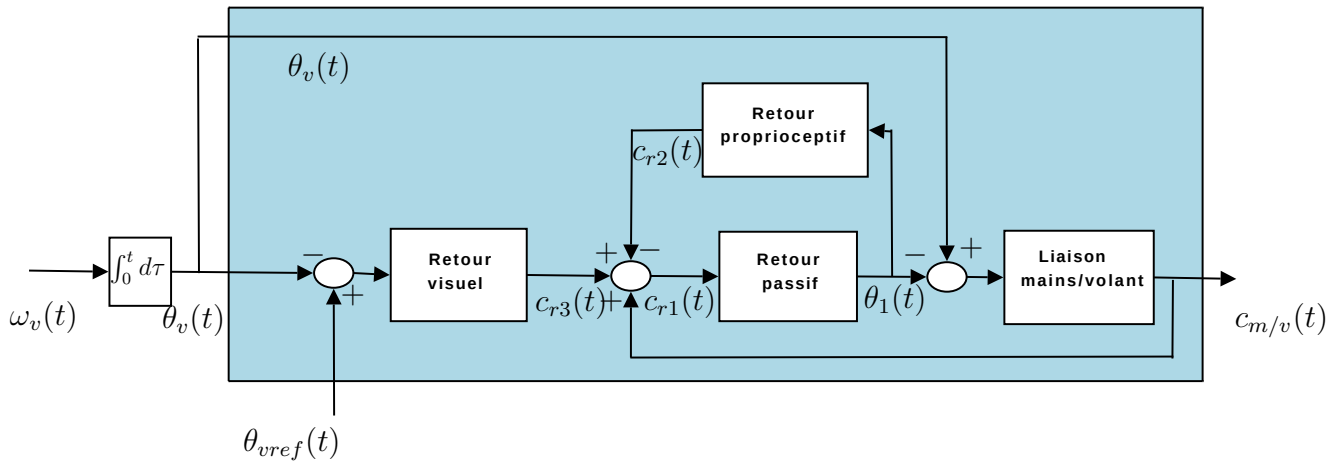


FIG. 4.11 – Schéma fonctionnel du conducteur correspondant à la troisième étape du protocole expérimental

Compte tenu de ce schéma (figure 4.11) et des transferts $G_0(s)$, $G_1(s)$, $G_2(s)$ et $G_3(s)$, le transfert biomécanique actif (en présence du retour visuel) est à présent de la forme :

$$G''_E(s) = \frac{c_{m/v}(s)}{\theta_v(s)}, \quad (4.3.14)$$

$$G_E'' = \frac{G_3(s)G_0(s)}{1 + \frac{G_0(s)G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}}, \quad (4.3.15)$$

soit :

$$G_E''(s) = \frac{G_3(s) (b_2s + k_2) ((J_{bras}s^2 + b_{bras}s + k_{bras}) (1 + \tau_a s) + (k_v s + k_p) \exp^{-T_d s})}{(J_{bras}s^2 + b_{bras}s + k_{bras}) (1 + \tau_a s) + (b_2s + k_2) (1 + \tau_a s) + (k_v s + k_p) \exp^{-T_d s}}. \quad (4.3.16)$$

4.3.2 Modèle biomécanique non entier du conducteur

La dérivation non entière [?] est introduite dans les différents modèles présentés au paragraphe précédent au niveau des phénomènes dissipatifs. En effet, l'expertise acquise par l'équipe CRONE dans le domaine des Systèmes à Dérivées Non Entières (SDNE) permet d'affirmer que c'est au niveau des phénomènes dissipatifs que l'introduction de la dérivation non entière est la plus pertinente [?]. Ainsi, toutes les dérivées d'ordre 1 des déplacements angulaires sont remplacées par des dérivées d'ordre non entier ν et μ compris strictement entre 0 (phénomène purement élastique) et 1 (phénomène purement dissipatif). Le transfert viscoélastique de la liaison mains/volant devient alors :

$$G_{0\nu}(s) = \frac{c_{m/v}(s)}{\theta_v(s) - \theta_1(s)} = b_\nu s^\nu + k_0, \quad (4.3.17)$$

et celui du retour passif :

$$G_{1\nu}(s) = \frac{\theta_1(s)}{c_{r1}(s)} = \frac{1}{J_{bras}s^2 + b_\nu s^\nu + k_{bras}}, \quad (4.3.18)$$

L'expression du transfert biomécanique passif non entier est alors donnée par :

$$G_{NE}(s) = \frac{(b_\nu s^\nu + k_0) (J_{bras}s^2 + b_\mu s^\mu + k_{bras})}{J_{bras}s^2 + b_\nu s^\nu + b_\mu s^\mu + (k_{bras} + k_0)}, \quad (4.3.19)$$

celle du transfert biomécanique proprioceptif (actif en l'absence du retour visuel) par :

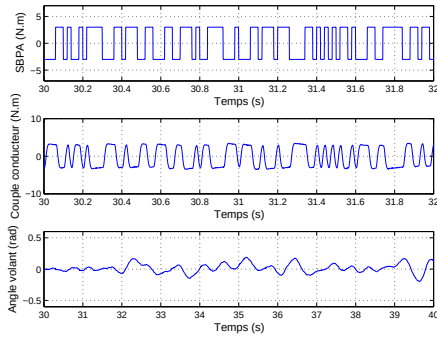
$$G'_{NE}(s) = \frac{(b_\nu s^\nu + k_2) ((J_{bras}s^2 + b_\mu s^\mu + k_{bras}) (1 + \tau_a s) + (k_v s + k_p) \exp^{-T_d s})}{(J_{bras}s^2 + b_\mu s^\mu + k_{bras}) (1 + \tau_a s) + (b_\nu s^\nu + k_2) (1 + \tau_a s) + (k_v s + k_p) \exp^{-T_d s}}, \quad (4.3.20)$$

et enfin celle du transfert biomécanique actif en présence du retour visuel par :

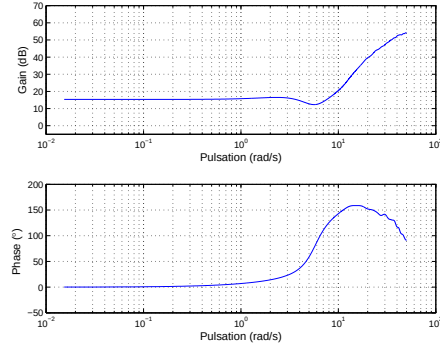
$$G''_{NE}(s) = \frac{G_3(s) (b_\nu s^\nu + k_2) ((J_{bras}s^2 + b_\mu s^\mu + k_{bras}) (1 + \tau_a s) + (k_v s + k_p) \exp^{-T_d s})}{(J_{bras}s^2 + b_\mu s^\mu + k_{bras}) (1 + \tau_a s) + (b_\nu s^\nu + k_2) (1 + \tau_a s) + (k_v s + k_p) \exp^{-T_d s}}. \quad (4.3.21)$$

4.3.3 Identification non paramétrique de la réponse fréquentielle

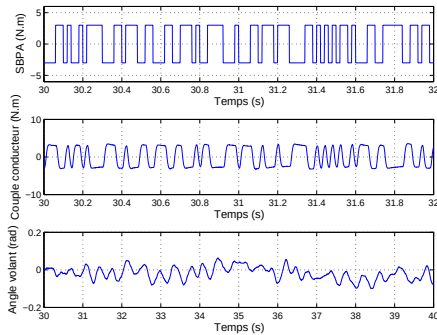
Les trois protocoles expérimentaux définis précédemment (p. 134) à savoir, le retour passif et la liaison mains/volants, le retour proprioceptif, et le retour visuel sont traités dans ce paragraphe. Les figures 4.12(a), 4.12(c) et 4.12(e) présentent la Séquence Binaire Pseudo Aléatoire (SBPA), utilisée en tant que perturbation au niveau du couple $c_0(t)$ développé par le servomoteur *brushless*, ainsi que les mesures de l'angle volant $\theta_v(t)$ et du couple conducteur $c_{m/v}(t)$ en réponse à cette perturbation de couple. Les réponses fréquentielles du gain et de la phase du conducteur pour chaque protocole expérimental, obtenues en utilisant la méthode d'identification non paramétrique décrite au paragraphe 3.5, sont tracées sur les figures 4.12(b), 4.12(d), 4.12(f).



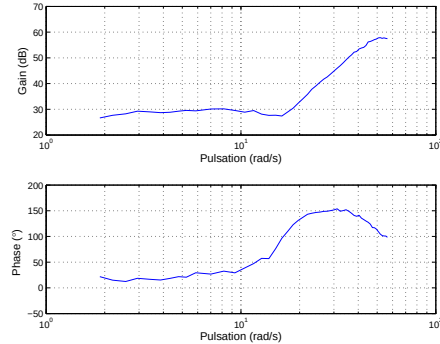
(a) Réponses temporelles de l'angle au volant et du couple conducteur obtenues en appliquant un signal de perturbation de type SBPA-retour passif



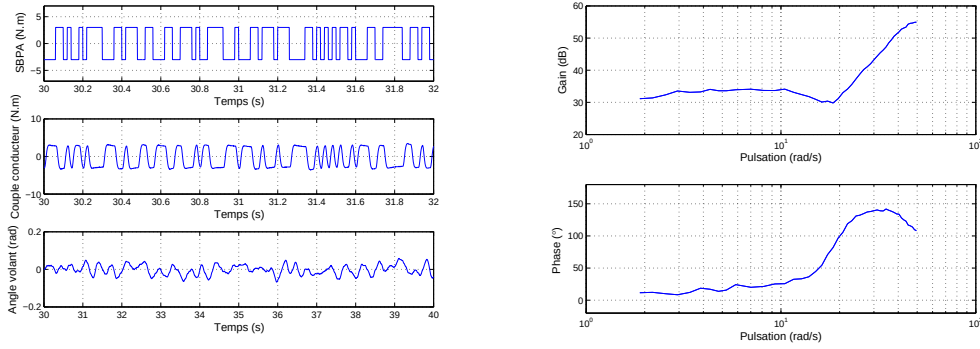
(b) Gain et phase de la réponse fréquentielle du conducteur dans le cas d'un retour passif



(c) Réponses temporelles de l'angle au volant et du couple conducteur obtenues en appliquant un signal de perturbation de type SBPA-retour proprioceptif



(d) Gain et phase de la réponse fréquentielle du conducteur dans le cas d'un retour proprioceptif



(e) Réponses temporelles de l'angle au volant et du couple conducteur obtenues en appliquant un signal de perturbation de type SBPA-retour visuel

(f) Gain et phase de la réponse fréquentielle du conducteur dans le cas d'un retour visuel

FIG. 4.12 – Réponses temporelles et fréquentielles obtenues suivant les étapes du protocole expérimental

En comparant les réponses fréquentielles présentées en 4.12(d) et 4.12(f) du retour proprioceptif et du retour visuel, il apparaît que la différence réside uniquement dans le gain statique qui est, en effet, plus important avec le retour visuel. Compte tenu du schéma fonctionnel de la figure 4.11, le retour visuel peut être représenté par un gain statique k_3 .

4.3.4 Estimation paramétrique des modèles biomécaniques

Dans cette partie, l'estimation des paramètres des modèles biomécaniques entier et non entier est présentée, pour le retour passif (4.3.5) et (4.3.19), le retour proprioceptif (4.3.12) et (4.3.20), et enfin le retour visuel (4.3.16) et (4.4.2.2). Cette estimation se base sur la minimisation du critère quadratique fréquentiel pondéré entre l'erreur sur le gain et sur la phase :

$$J_{\%}(\theta) = \alpha J_G + (1 - \alpha) J_{\phi}, \quad (4.3.22)$$

avec

$$J_{G\%} = \frac{\sum_{n=1}^N \left(|\hat{G}(j\omega_n)|_{dB} - |\hat{\hat{G}}(j\omega_n)|_{dB} \right)^2}{\sum_{n=1}^N \left(|\hat{G}(j\omega_n)|_{dB} \right)^2} \times 100, \quad (4.3.23)$$

et

$$J_{\phi\%} = \frac{\sum_{n=1}^N \left(\arg(\hat{G}(j\omega_n)) - \arg(\hat{\hat{G}}(j\omega_n)) \right)^2}{\sum_{n=1}^N \left(\arg(\hat{G}(j\omega_n)) \right)^2} \times 100, \quad (4.3.24)$$

où N représente le nombre total des fréquences, et $\hat{G}(j\omega)$ la réponse fréquentielle estimée (3.5.1), $\hat{\hat{G}}(j\omega_n)$ la réponse fréquentielle du modèle paramétrique entier ou non entier. Le facteur de pondération α est choisi égale à 0.5.

Les tableaux 4.1, 4.2 et 4.3 présentent les résultats de l'estimation paramétrique des modèles entier et non entier pour le retour passif, proprioceptif et visuel. Les paramètres estimés pour le retour passif sont fixés lors de l'estimation des paramètres du retour proprioceptif et du retour visuel.

	Retour passif	
	Entier	Non Entier
Critère	$J_E(\%) = 0.112$	$J_{NE}(\%) = 0.068$
Paramètres biomécaniques	$J_{bras} = 0.15 \text{ kgm}^2$	$J_{bras} = 0.18 \text{ kgm}^2$
	$b_{bras} = 0.70 \text{ Nms/rad}$	$b_\mu = 1.02 \text{ Nms/rad}$
	$k_{bras} = 5.84 \text{ Nm/rad}$	$k_{bras} = 5.84 \text{ Nm/rad}$
		$\mu = 0.80$
Paramètres liaison mains/volant	$k_2 = 234.61 \text{ Nm/rad}$	$k_2 = 107.22 \text{ Nm/rad}$
	$b_2 = 3.87 \text{ Nms/rad}$	$b_\nu = 23.95 \text{ Nms/rad}$
		$\nu = 0.60$

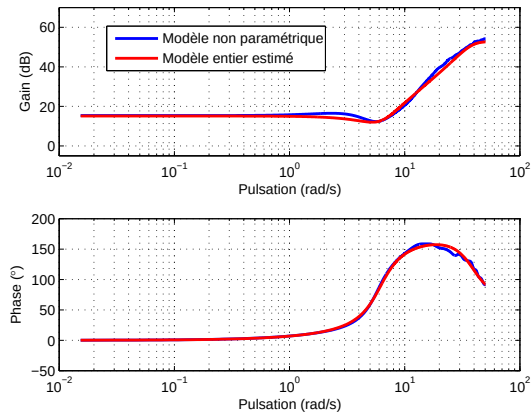
TAB. 4.1 – Résultat de l'estimation paramétrique avec $\alpha = 0.5$ - retour passif

En comparant les résultats correspondant aux modèles entier et non entier du retour passif, proprioceptif et visuel, il apparaît que l'introduction de la dérivation non entière au niveau des phénomènes dissipatifs permet de diminuer la valeur du critère d'un facteur de

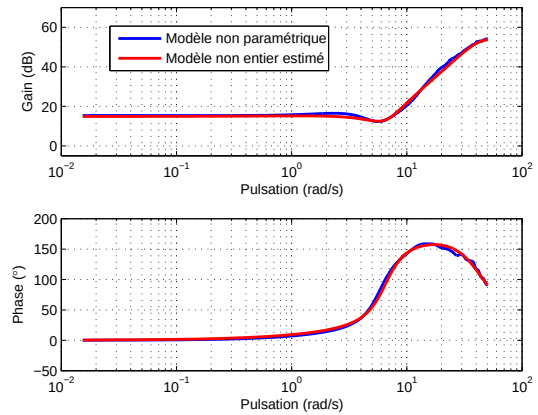
- ($J_E/J_{NE} = 1.64$) pour le retour passif,
- ($J_E/J_{NE} = 1.20$) pour le retour proprioceptif,
- ($J_E/J_{NE} = 1.70$) pour le retour visuel.

La figure 4.13 présente les réponses fréquentielles

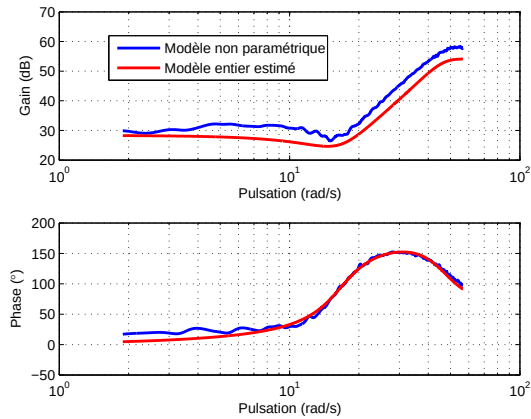
- des modèles paramétriques entier (figure 4.13(a)) et non entier (4.13(b)) pour le retour passif,
- des modèles paramétriques entier (4.13(c)) et non entier (4.13(d)) pour le retour proprioceptif,
- des modèle paramétrique entier (4.13(e)) et non entier (4.13(f)) pour le retour visuel.



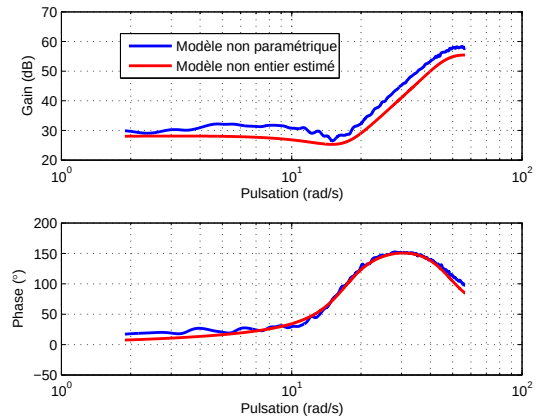
(a) Gain et phase de la réponse fréquentielle et le modèle paramétrique entier-retour passif



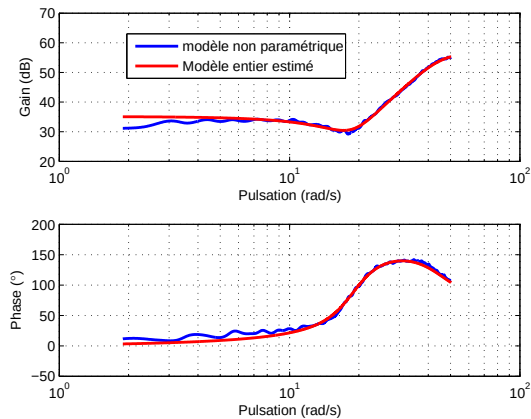
(b) Gain et phase de la réponse fréquentielle et le modèle paramétrique non entier-retour passif



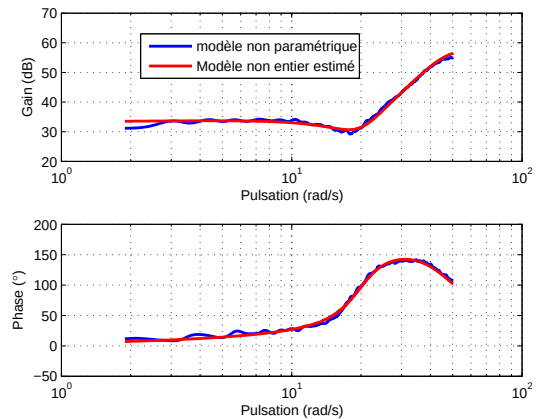
(c) Gain et phase de la réponse fréquentielle et le modèle paramétrique entier-retour proprioceptif



(d) Gain et phase de la réponse fréquentielle et le modèle paramétrique non entier-retour proprioceptif



(e) Gain et phase de la réponse fréquentielle et le modèle paramétrique entier-retour visuel



(f) Gain et phase de la réponse fréquentielle et le modèle paramétrique non entier-retour visuel

FIG. 4.13 – Modèles entiers et non entiers estimés pour les trois parties du protocole expérimental

	Retour proprioceptif	
	Entier	Non Entier
Critère	$J_E(\%) = 0.50$	$J_{NE}(\%) = 0.42$
Paramètres biomécaniques	$J_{bras} = 0.15 \text{ kgm}^2$	$J_{bras} = 0.18 \text{ kgm}^2$
	$b_{bras} = 0.70 \text{ Nms/rad}$	$b_\mu = 1.02 \text{ Nms/rad}$
	$k_{bras} = 5.84 \text{ Nm/rad}$	$k_{bras} = 5.84 \text{ Nm/rad}$
		$\mu = 0.80$
Paramètres liaison mains/volant	$k_2 = 234.61 \text{ Nm/rad}$	$k_2 = 107.22 \text{ Nm/rad}$
	$b_2 = 3.87 \text{ Nms/rad}$	$b_\nu = 23.95 \text{ Nms/rad}$
		$\nu = 0.60$
Paramètres du retour proprioceptif	$k_p = 23.47 \text{ Nm/rad}$	$k_p = 25.14 \text{ Nm/rad}$
	$k_v = 1.56 \text{ Nm/rad}$	$k_v = 1.86 \text{ Nm/rad}$
	$T_d = 0.033 \text{ s}$	$T_d = 0.027 \text{ s}$
	$\tau_a = 0.005 \text{ s}$	$\tau_a = 0.0093 \text{ s}$

TAB. 4.2 – Résultat de l'estimation paramétrique avec $\alpha = 0.5$ - retour proprioceptif

	Retour visuel	
	Entier	Non Entier
Critère	$J_E(\%) = 0.094$	$J_{NE}(\%) = 0.055$
Paramètres biomécaniques	$J_{bras} = 0.15 \text{ kgm}^2$	$J_{bras} = 0.18 \text{ kgm}^2$
	$b_{bras} = 0.70 \text{ Nms/rad}$	$b_\mu = 1.02 \text{ Nms/rad}$
	$k_{bras} = 5.84 \text{ Nm/rad}$	$k_{bras} = 5.84 \text{ Nm/rad}$
		$\mu = 0.80$
Paramètres liaison mains/volant	$k_2 = 234.61 \text{ Nm/rad}$	$k_2 = 107.22 \text{ Nm/rad}$
	$b_2 = 3.87 \text{ Nms/rad}$	$b_\nu = 23.95 \text{ Nms/rad}$
		$\nu = 0.60$
Paramètres du retour proprioceptif	$k_p = 39.73 \text{ Nm/rad}$	$k_p = 38.79 \text{ Nm/rad}$
	$k_v = 1.78 \text{ Nm/rad}$	$k_v = 2.67 \text{ Nm/rad}$
	$T_d = 6.3e - 3 \text{ s}$	$T_d = 6.4e - 3 \text{ s}$
	$\tau_a = 0.020 \text{ s}$	$\tau_a = 0.029 \text{ s}$
Paramètres du retour visuel	$K_3 = 0.49 \text{ Nm/rad}$	$K_3 = 1.41 \text{ Nm/rad}$

TAB. 4.3 – Résultat de l'estimation paramétrique avec $\alpha = 0.5$ - retour visuel

4.4 Modélisation boîte blanche de la dynamique du conducteur en cas de rejet de perturbation - approche ensembliste

Les études du suivi de trajectoire sur un, voir plusieurs, individu(s) montrent que les réactions (ou réponses) recueillies ne sont jamais identiques. Elles varient non seulement d'un conducteur à l'autre mais aussi d'une expérience à l'autre pour le même conducteur. Il est alors préférable de rechercher un ensemble de modèles faisable d'un, voire plusieurs, conducteur(s) plutôt qu'un modèle unique. Le retour passif du conducteur ainsi que la liaison mains/volant ont été déterminés en se basant sur des modèles comportementaux proposés dans la littérature. Ces modèles, ne nécessitant pas de réaction du conducteur, présentent une faible dispersion (figure 4.14(a)). Lors de la modélisation du retour proprioceptif et du retour visuel, le conducteur présente des variations réactionnelles significatives d'une expérience à l'autre (figure 4.14(b), 4.14(c)), il est donc préférable d'estimer un ensemble faisable de modèles pour le retour proprioceptif et le retour visuel au lieu d'un modèle unique.

A travers plusieurs expérimentations (au total $I = 10$) effectuées sur le fauteuil instrumenté, plusieurs réponses fréquentielles sont obtenues. La prise en compte des incertitudes sur le gain et sur la phase dues à la méthode d'identification non paramétrique permet d'obtenir une borne inférieure et une borne supérieure en chaque fréquence ω_n pour chacune des réponses fréquentielles.

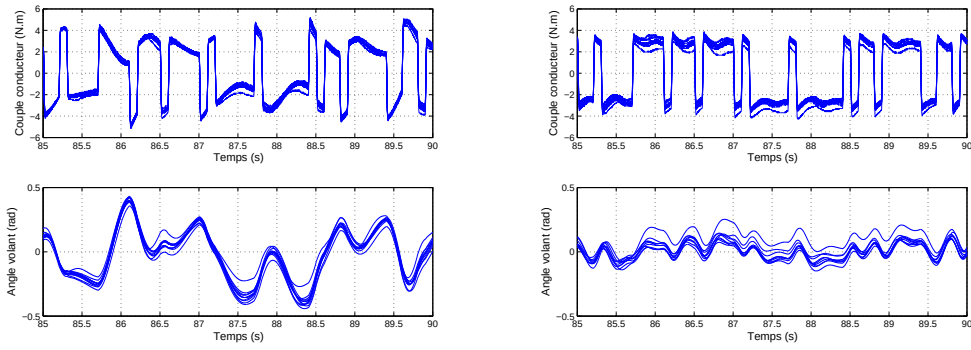
Dans le contexte du retour proprioceptif et du retour visuel, l'estimation du gain et de la phase à partir d'un seul jeu de données temporelles est faite avec un intervalle de confiance correspondant à 3 écarts-types :

$$|\hat{G}| - 3\sigma[|\hat{G}|] \leq |G| \leq |\hat{G}| + 3\sigma[|\hat{G}|], \quad (4.4.1)$$

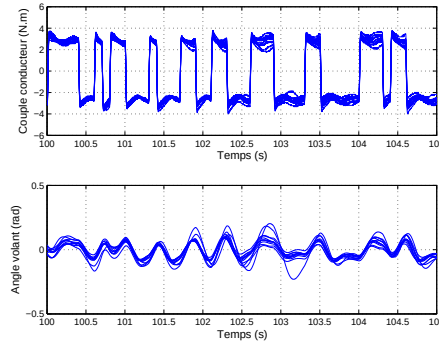
$$\hat{\varphi} - 3\sigma[\hat{\varphi}] \leq |\varphi| \leq \hat{\varphi} + 3\sigma[\hat{\varphi}]. \quad (4.4.2)$$

Les réponses fréquentielles sont ensuite fusionnées, les bornes inférieure sur le gain $\underline{G}_n$, supérieure sur le gain $\overline{G}_n$, inférieure sur la phase $\underline{\varphi}_n$, supérieure sur la phase $\overline{\varphi}_n$, de la réponse en chaque fréquence ω_n , sont obtenues en faisant l'union de toutes les bornes à ± 3 écarts-types de chaque expérience. Ainsi les réponses fréquentielles du gain et de la phase représentent les mesures incertaines à utiliser dans l'approche ensembliste pour le retour proprioceptif et le retour visuel.

Pour le retour proprioceptif, le modèle biomécanique retenu est de type (4.3.20), les paramètres du retour passif ($b_\nu, k_2, b_\mu, J_{bras}, k_{bras}, \nu, \mu$) ayant déjà été estimés, seul le vecteur de



(a) Réponses temporelles recueillies-retour passif (b) Réponses temporelles recueillies-retour proprioceptif



(c) Réponses temporelles recueillies-retour visuel

FIG. 4.14 – Réponses temporelles recueillies à partir de I expérimentations pour un retour passif, proprioceptif et visuel

paramètres,

$$\boldsymbol{\theta} = ([k_v], [k_p], [T_d], [\tau_a])^T, \quad (4.4.3)$$

de la partie réflexive du conducteur est estimé sous la forme d'un vecteur d'intervalles. De même pour le retour visuel, le modèle biomécanique retenu est de type (4.4.2.2). Les paramètres du retour passif ($b_\nu, k_2, b_\mu, J_{bras}, k_{bras}, \nu, \mu$) ainsi que le gain statique k_3 du retour visuel ayant déjà été estimés, seul le vecteur de paramètres $\boldsymbol{\theta}$ est estimé sous la forme d'un vecteur d'intervalles. Les dispersions importantes observées sur les réponses temporelles et fréquentielles du retour proprioceptif et du retour visuel sont dues principalement aux variations réactionnelles du conducteur modélisées par les paramètres (k_v, k_p, T_d, τ_a) dans (4.3.7), (4.3.8) et (4.3.9).

4.4.1 Formulation du problème d'estimation ensembliste

L'objectif est donc de trouver l'ensemble de paramètres θ de (4.4.3) faisables pour le modèle non entier décrit par (4.3.20) et (4.4.2.2), le reste des paramètres étant estimé précédemment. Le vecteur de paramètres θ est jugé faisable si le modèle évalué avec θ est consistant avec les mesures et les intervalles d'incertitudes de ces mesures. Le problème d'estimation ensembliste est donc formulé comme un problème de satisfaction de contraintes (CSP) :

$$\mathcal{CSP} : \begin{cases} \underline{G}_n \leq |G(j\omega_n, \theta)| \leq \overline{G}_n, \\ \underline{\varphi}_n \leq \varphi(\omega_n, \theta) \leq \overline{\varphi}_n, \quad \omega_n (n = 1, \dots, N), \end{cases} \quad (4.4.4)$$

où $|G(j\omega_n, \theta)|$ et $\varphi(\omega_n, \theta)$ représentent le gain en dB et la phase en degré du modèle (4.3.20) ou (4.4.2.2), calculés pour le vecteur de paramètres θ .

4.4.2 Résolution du problème d'estimation ensembliste

L'ensemble $\mathbb{S}$ des solutions est donné par :

$$\mathbb{S} = \{\theta \in \Theta \mid f(\omega_n, \theta) \in [y(\omega_n)], \forall n \in \{1, \dots, N\}\}, \quad (4.4.5)$$

avec

$$\begin{cases} f(\omega_n, \theta) = \begin{pmatrix} |G(j\omega_n, \theta)| \\ \varphi(\omega_n, \theta) \end{pmatrix} \\ [y(\omega_n)] = \begin{pmatrix} [\underline{G}_n, \overline{G}_n] \\ [\underline{\varphi}_n, \overline{\varphi}_n] \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (4.4.6)$$

Cet ensemble peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\mathbb{S} = f^{-1}([y]) \cap \Theta. \quad (4.4.7)$$

La caractérisation de l'ensemble $\mathbb{S}$ défini par (4.4.7) est un problème d'inversion ensembliste, qui peut être résolu d'une manière garantie en utilisant le solveur QUIMPER.

4.4.2.1 Retour proprioceptif : résultats

Le gain et la phase de la réponse fréquentielle sont tracés sur le diagramme de *Bode* de la figure 4.15 avec un intervalle de confiance à 3 écarts-types (4.4.1) et (4.4.2).

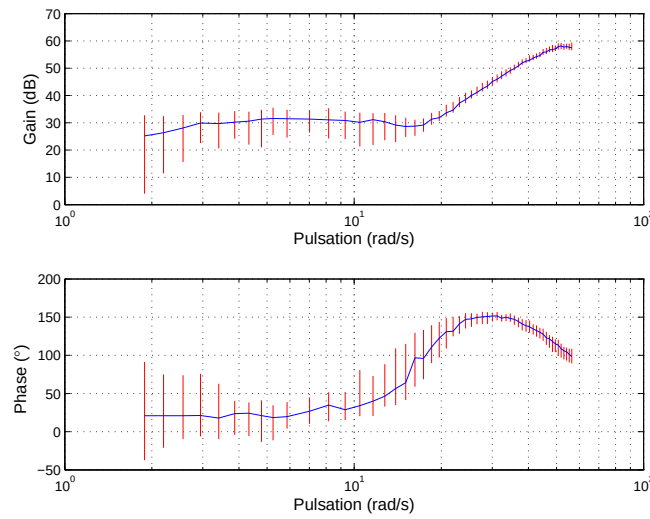


FIG. 4.15 – Diagramme de *Bode* du conducteur (en bleu) et intervalles de confiance à 3 écarts-types (en rouge) - retour proprioceptif

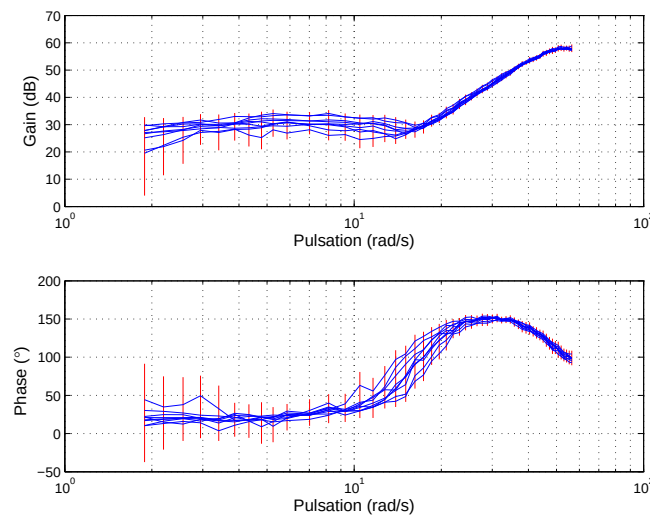


FIG. 4.16 – Diagramme de *Bode* du conducteur (en bleu) et union des intervalles de confiance à 3 écarts-types (en rouge) - retour proprioceptif

La figure 4.16 présente les $I = 10$ réponses fréquentielles du gain et de la phase du conducteur avec l'union de tous les intervalles de confiances à 3 écarts-types en chaque fréquence ω_n .

L'ensemble des solutions faisables peut être inclus dans l'hypercube :

$$([k_p], [k_v], [T_d], [\tau_a]) = ([8.10, 40.02], [0.79, 3.75], [3.6, 51.8] \times 10^{-3}, [0, 52.7] \times 10^{-3}). \quad (4.4.8)$$

Le paramètre $[k_p]$ présente la plus grande dispersion (la projection en 1D donne $[8.10, 40.02]$), car $[k_p]$ intervient directement dans le calcul du gain statique du modèle global $G(s)$ de l'équation (4.3.20) :

$$G_{statique} = \frac{k_2 k_{bras} + k_p}{k_{bras} + k_2 + k_p}. \quad (4.4.9)$$

Or, les intervalles d'incertitudes aux basses fréquences présentent une très grande dispersion, entre 10 et 30 dB, comme le montre la figure 4.16. Il est donc logique d'obtenir une large dispersion pour le paramètre k_p . Le paramètre T_d , qui représente le temps nécessaire pour la transmission et le traitement de l'information depuis le ressenti jusqu'à la réaction du conducteur (4.3.8), compris dans l'intervalle $[3.6, 51.8] \times 10^{-3}$ ms, possède un ordre de grandeur cohérent avec les expériences pratiques [?]. Le paramètre τ_a , qui représente la constante de temps de réaction des muscles, compris dans l'intervalle $[0, 52.7] \times 10^{-3}$, est quant à lui tout à fait conforme avec les expériences pratiques. En effet, dans [?], les auteurs trouvent une constante de temps autour de 20 ms pour la réaction musculaire.

L'encadrement extérieur $\bar{\mathbb{S}}$ des solutions est projeté en 2D sur les figures 4.17(a) et 4.17(b).

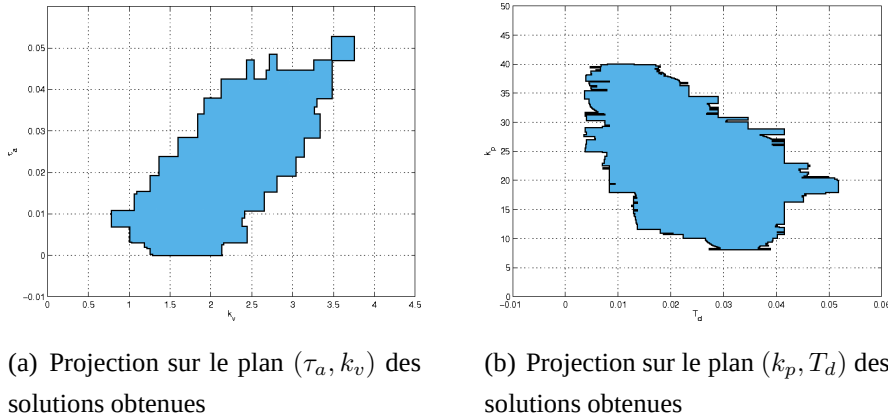


FIG. 4.17 – Projection en 2D des solutions obtenues dans le cas du retour proprioceptif

La figure 4.18 montre que toutes les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\bar{\mathbb{S}}$ sont consistantes avec les intervalles d'incertitude permettant ainsi de valider le modèle ensembliste obtenu.

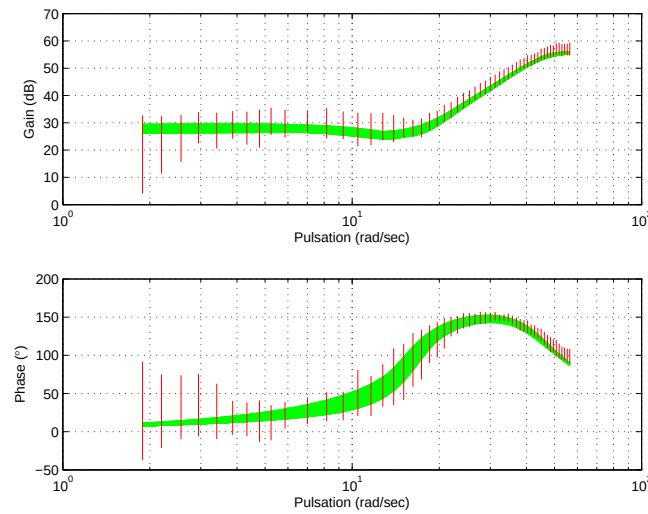


FIG. 4.18 – Diagramme de *Bode* des mesures incertaines (en rouge) et réponses en fréquence des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\bar{\mathbb{S}}$ (en vert) - retour proprioceptif

4.4.2.2 Retour visuel : résultats

Le gain et la phase de la réponse fréquentielle sont tracés sur le diagramme de *Bode* de la figure 4.19 avec un intervalle de confiance à 3 écarts-types (4.4.1),(4.4.2). La figure 4.20,

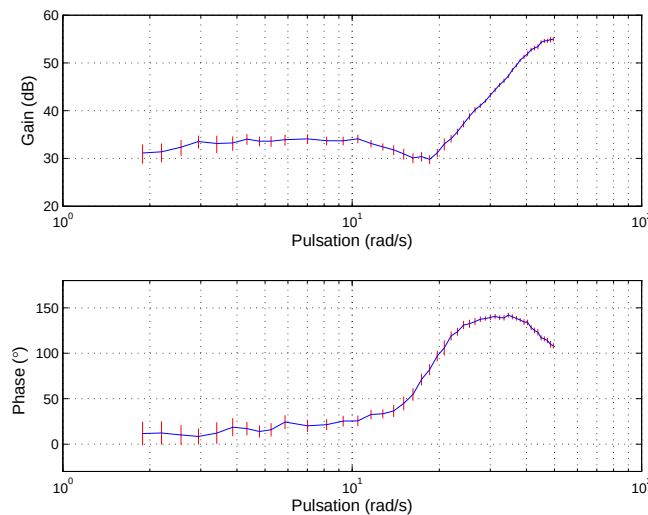


FIG. 4.19 – Diagramme de *Bode* du conducteur (en bleu) et intervalles de confiance à 3 écarts-types (en rouge)-retour visuel

présente les $I = 10$ réponses fréquentielles du gain et de la phase du conducteur, avec l'union de tout les intervalles de confiance à 3 écarts-types en chaque fréquence ω_n .

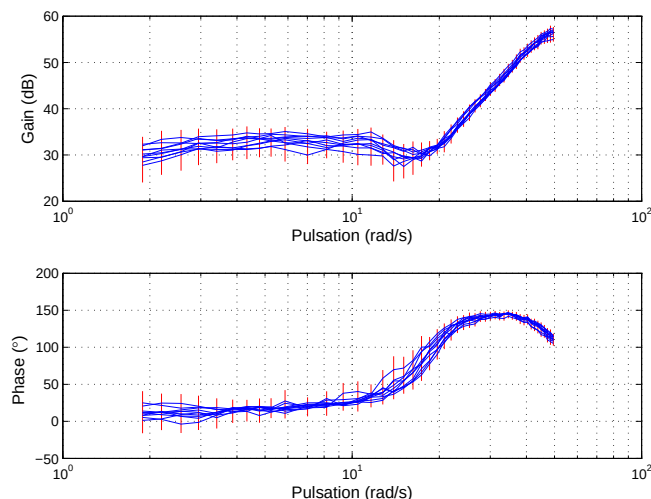


FIG. 4.20 – Diagramme de *Bode* du conducteur (en bleu) et union des intervalles de confiance à 3 écarts-types (en rouge) - retour visuel

L'ensemble des solutions faisables peut être inclus dans l'hypercube :

$$([k_p], [k_v], [T_d], [\tau_a]) = ([33, 42.53], [0.46, 7.79], [0, 3.85] \times 10^{-2}, [0, 52.7] \times 10^{-2}), \quad (4.4.10)$$

L'encadrement extérieur $\bar{\mathbb{S}}$ des solutions est projeté en 2D sur les figures 4.21(a) et 4.21(b).

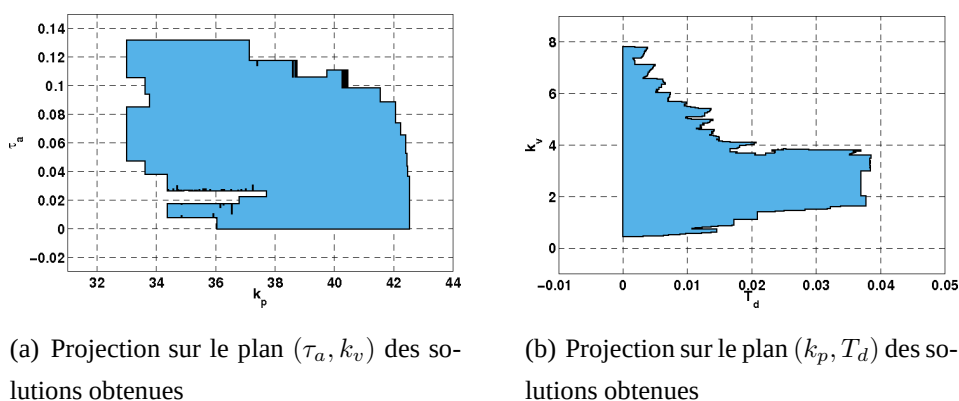


FIG. 4.21 – Projection en 2D des solutions obtenues dans le cas du retour visuel

La figure 4.22 montre que toutes les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir

de l'approximation extérieure $\bar{\mathbb{S}}$ sont consistantes avec les intervalles d'incertitude permettant ainsi de valider le modèle ensembliste obtenu.

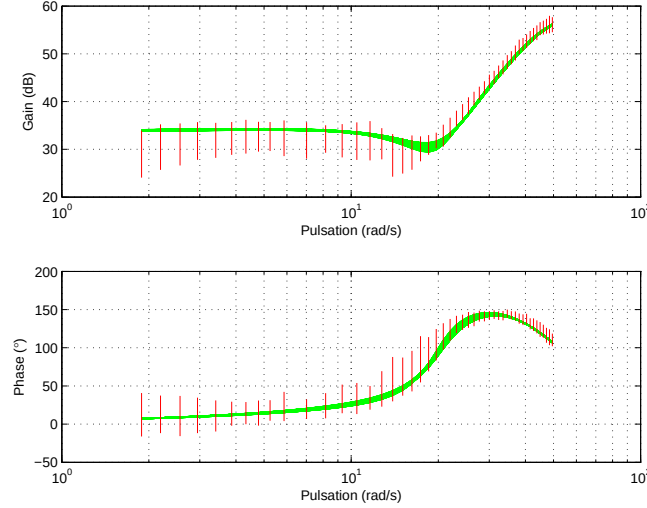


FIG. 4.22 – Diagramme de *Bode* des mesures incertaines (en rouge) et réponses en fréquence des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\bar{\mathbb{S}}$ (en vert) - retour visuel

L'inconvénient d'une modélisation de type boîte blanche est qu'elle introduit un grand nombre de paramètres (voir (4.3.12) et (4.3.16) pour les modèles entiers ou (4.3.20) et pour les modèles non entiers) même si dans l'approche ensembliste, seuls les paramètres qui interviennent dans la partie reflexive du conducteur sont estimés. Par conséquent, dans une deuxième approche, une modélisation de type boîte noire est présentée.

4.5 Modélisation boîte noire de la dynamique du conducteur en suivi de trajectoire - approche ensembliste

Dans cette approche, la dynamique du conducteur est modélisée dans le cadre d'un suivi de trajectoire à partir des réponses fréquentielles. La figure 4.23 montre les signaux projetés sur l'écran au moment de l'essai. Le rôle du conducteur consiste à minimiser l'écart entre la consigne en rouge et l'angle au volant en bleu résultant de l'action du conducteur sur le volant. Par conséquent un modèle est identifié entre l'angle au volant θ_v et la consigne θ_{ref} , soit :

$$G(s) = \frac{\theta_v(s)}{\theta_{ref}(s)}. \quad (4.5.1)$$

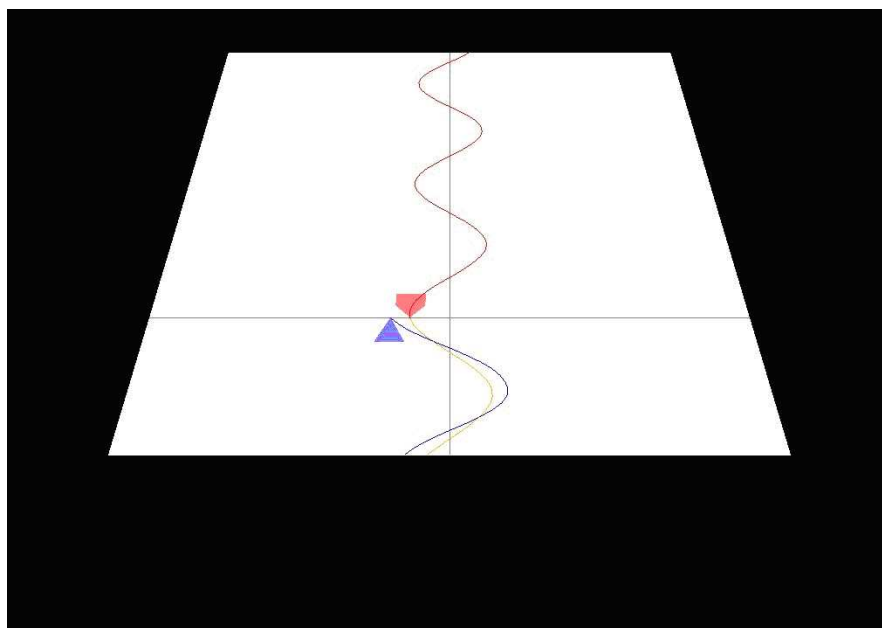


FIG. 4.23 – Projection de la consigne (en rouge) et de l'angle au volant (en bleu) lors d'un essai

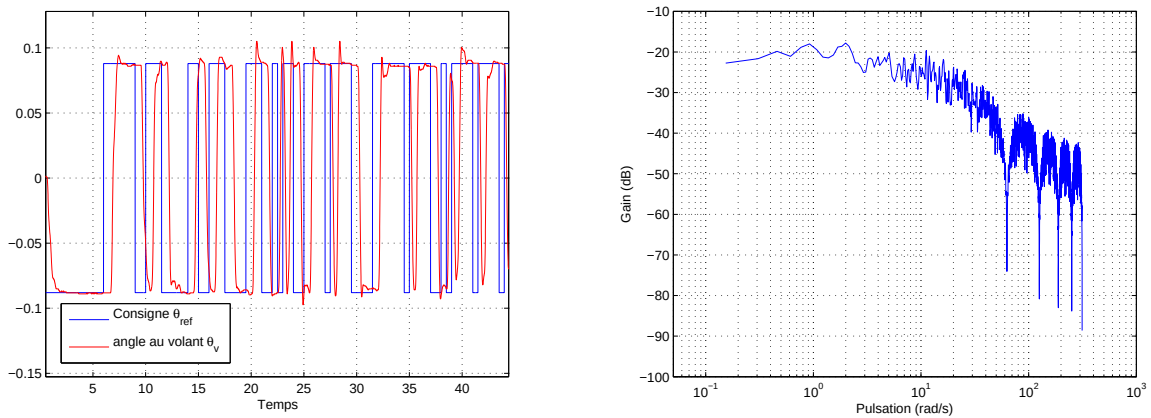
4.5.1 Identification non paramétrique de la réponse fréquentielle

La réponse fréquentielle dans le cas de suivi de trajectoire est obtenue en appliquant la méthode d'identification non paramétrique décrite au paragraphe 3.5.

La consigne θ_{ref} est une SBPA ayant une amplitude entre -0.09 et 0.09 rad, une durée minimale de 0.1 sec, et une durée maximale de 6 sec. La consigne ainsi que l'angle volant sont présentées sur la figure 4.24(a). La densité spectrale de puissance de θ_{ref} est tracée sur la figure 4.24(b).

Des études en simulateur ayant montré que le temps de réaction de l'être humain, à partir d'informations perçues par le canal visuel, est de l'ordre de 0.2 sec, le contenu spectral doit couvrir les basses fréquences jusqu'à approximativement 5 Hz ou 30 rad/sec.

Les réponses fréquentielles du gain et de la phase sont présentées sur la figure 4.25.



(a) Réponses temporelles recueillies - Consigne et l'angle au volant (b) Densité spectrale de puissance du signal θ_{ref}

FIG. 4.24 – Réponses temporelles recueillies et densité spectrale de puissance du signal d'entrée

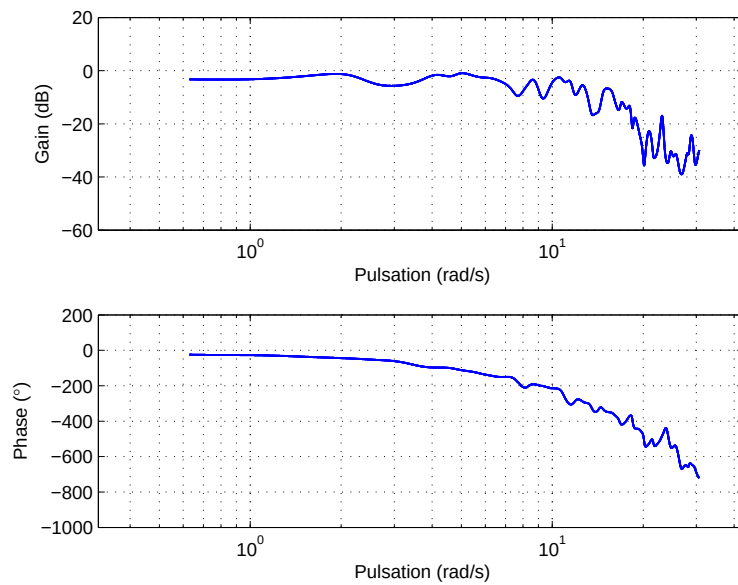


FIG. 4.25 – Diagramme de *Bode* du conducteur dans un cas de suivi de trajectoire

4.5.2 Estimation paramétrique d'un modèle de type boîte noire

L'objectif de cette partie est d'estimer les paramètres d'un modèle qui représente au mieux la réponse fréquentielle du conducteur, en minimisant le critère fréquentielle de type (4.3.22)

Le modèle d'ordre entier choisi est de la forme :

$$G(s) = \frac{k}{(b+s)^m} \exp^{-rs}. \quad (4.5.2)$$

L'estimation paramétrique de k , b et r a été effectuée pour plusieurs valeurs de l'ordre entier m . L'ordre entier qui minimise le critère (4.3.22) est $m = 5$.

De même, le modèle non entier choisi est de la forme :

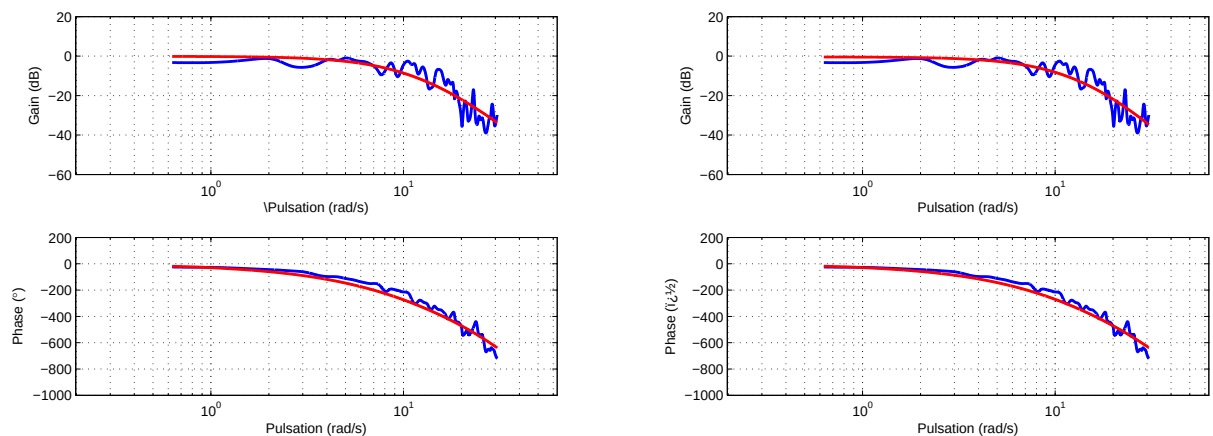
$$G(s) = \frac{k}{(b + s)^\nu} \exp^{-rs}. \quad (4.5.3)$$

Le tableau 4.4 présente les résultats de l'estimation des paramètres du modèle entier et non entier.

Entier	Non Entier
$J_E(\%) = 3.75$	$J_{NE}(\%) = 2.9$
$k = 904$	$k = 990.16$
$b = 2.53$	$b = 3.85$
$r = 1.57 \text{ s}$	$r = 1.02 \text{ s}$
	$\nu = 5.52$

TAB. 4.4 – Résultat de l'estimation paramétrique pour le modèle entier et non entier dans le cas de suivi de trajectoire

La figure 4.5.2 présente les réponses fréquentielles gain et phase avec les modèles paramétriques entier 4.26(a) et non entier 4.26(b)



(a) Gain et phase de la réponse fréquentielle obtenue et du modèle paramétrique entier

(b) Gain et phase de la réponse fréquentielle obtenue et du modèle paramétrique non entier

FIG. 4.26 – Réponses fréquentielles gain et phase avec les modèles paramétriques entier et non entier

En comparant les résultats correspondant aux modèles entier et non entier, il apparaît que l'introduction d'un ordre non entier de $\nu = 5.52$ permet de diminuer la valeur du critère d'un facteur de ($J_E/J_{NE} = 1.3$).

4.5.3 Modélisation non entière par approche ensembliste

Les approches ensembliste sont adoptées, lors de la modélisation du suivi de trajectoire à partir de plusieurs expérimentations. Un ensemble de modèles est alors estimé au lieu d'un modèle unique. Après avoir effectué plusieurs expérimentations, les signaux recueillis de l'angle au volant sont présentés sur la figure 4.27

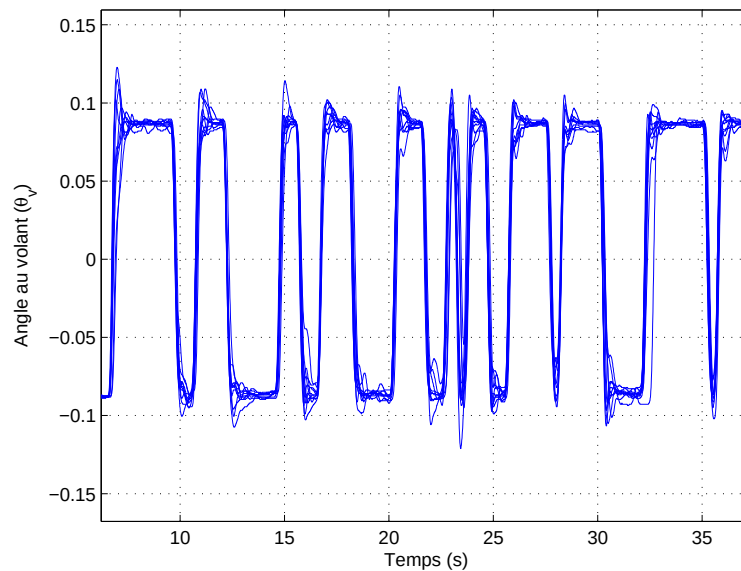


FIG. 4.27 – Réponses temporelles recueillies issues de dix expériences

A travers les expérimentations effectuées sur le fauteuil instrumenté, plusieurs réponses fréquentielles sont obtenues. Les incertitudes sur le gain décrites par (4.4.1) et sur la phase décrites par (4.4.2) dues à la méthode d'identification non paramétrique sont également prises en compte.

Dans le contexte du suivi de trajectoire, l'estimation sur le gain et sur la phase à partir d'un seul jeu de données est faite avec un intervalle de confiance de 3 écarts-types (4.28).

Comme précédemment, l'ensemble des réponses fréquentielles est ensuite fusionné, les bornes inférieure sur le gain, $\underline{G}_n$, supérieure sur le gain, $\overline{G}_n$, inférieure sur la phase, $\underline{\varphi}_n$, supérieure sur la phase, $\overline{\varphi}_n$, de la réponse en chaque fréquence ω_n , sont obtenues en faisant l'union

de toutes les bornes à 3 écarts- types de chaque expérimentation (4.29). Ainsi, les réponses fréquentielles du gain et de la phase représentent les données incertaines à utiliser dans l'approche ensembliste pour le suivi de trajectoire.

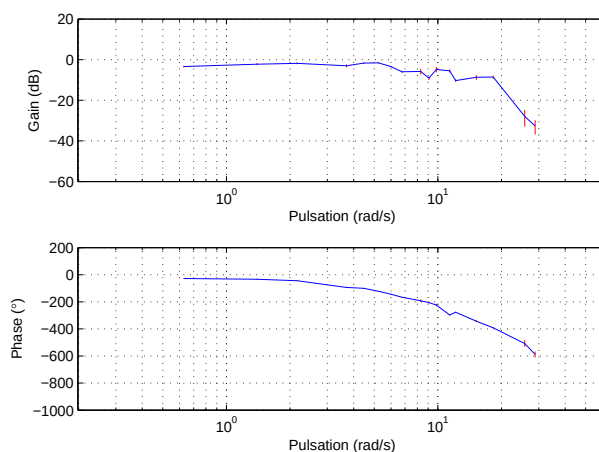


FIG. 4.28 – Diagramme de *Bode* du conducteur (en bleu) et intervalles de confiance à 3 écarts-types dans le cas de suivi de trajectoire

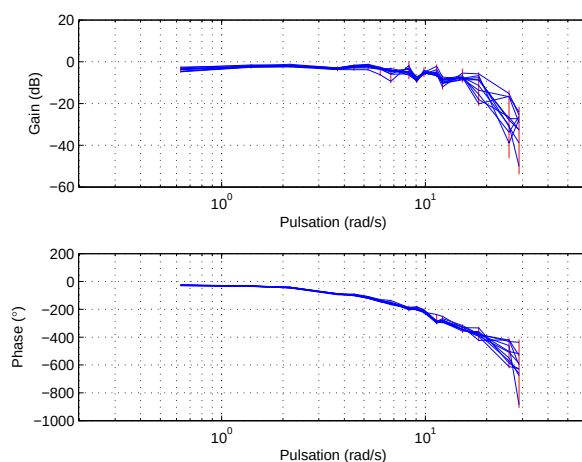


FIG. 4.29 – Diagramme de *Bode* du conducteur en bleu et union des intervalles de confiance à 3 écarts-types en rouge dans le cas de suivi de trajectoire

Le vecteur de paramètre $\theta = ([k], [b], [\nu], [r])$ est estimé sous la forme d'un vecteur d'intervalle en résolvant le CSP suivant :

$$\text{CSP} : \begin{cases} \underline{G}_n \leq |G(j\omega_n, \theta)| \leq \overline{G}_n, \\ \underline{\varphi}_n \leq \varphi(\omega_n, \theta) \leq \overline{\varphi}_n. \end{cases} \quad (4.5.4)$$

où $|G(j\omega_n, \theta)|$ et $\varphi(\omega_n, \theta)$ représentent le gain en dB et la phase en degré du modèle (4.5.3).

L'ensemble $\mathbb{S}$ des solutions est donné par :

$$\mathbb{S} = \{\theta \in \Theta \mid f(\omega_n, \theta) \in [y(\omega_n)], \forall n \in \{1, \dots, N\}\}, \quad (4.5.5)$$

avec

$$\begin{cases} f(\omega_n, \theta) = \begin{pmatrix} |G(j\omega_n, \theta)| \\ \varphi(\omega_n, \theta) \end{pmatrix} \\ [y(\omega_n)] = \begin{pmatrix} [|G(j\omega_n, \theta)|] \\ [\varphi(\omega_n, \theta)] \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (4.5.6)$$

L'estimation garantie de l'ensemble $\mathbb{S}$ est faite à l'aide du solveur QUIMPER.

Résultats

L'ensemble des solutions faisables peut être inclus dans l'hypercube :

$$([k], [b], [\nu], [r]) = ([970, 1020.05], [3.65, 4.03], [5.26, 5.44], [0.85, 1.29]). \quad (4.5.7)$$

L'encadrement extérieur $\overline{\mathbb{S}}$ des solutions est projeté en 2D sur les figures 4.30(a) et 4.30(b).

La figure 4.31 montre que toutes les réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieure $\overline{\mathbb{S}}$ sont consistantes avec les intervalles d'incertitude permettant ainsi de valider le modèle ensembliste obtenu.

Ce travail préliminaire pourrait permettre, à moyen terme, de diagnostiquer des individus ayant un comportement anormal lorsque les paramètres estimés sont en dehors des ensembles de solutions calculés par l'approche ensembliste.

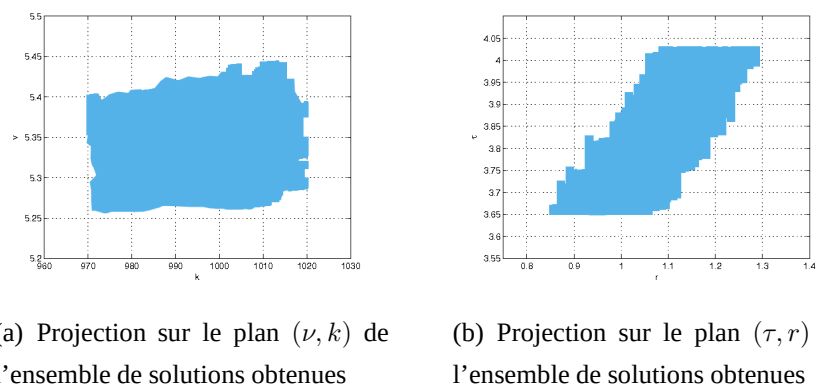


FIG. 4.30 – Projection en 2D de l'ensemble de solutions obtenues dans le cas de suivi de trajectoire

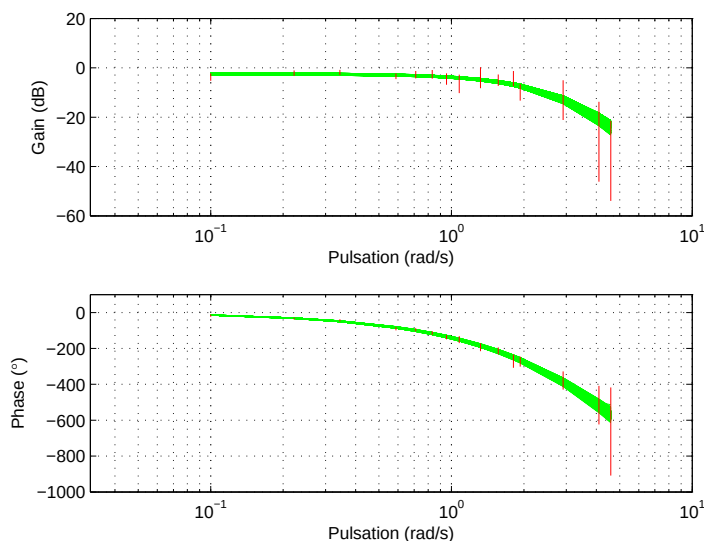


FIG. 4.31 – Diagramme de *Bode* des mesures incertaines (en rouge) et réponses fréquentielles des modèles évalués à partir de l'approximation extérieur $\bar{\mathbb{S}}$ (en vert) dans le cas de suivi de trajectoire

4.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à l'identification de la dynamique du conducteur dans deux contextes différents : rejet de perturbation et suivi de trajectoire. Dans les deux cas, une méthode d'identification non paramétrique est adoptée pour obtenir une réponse fréquentielle à partir des données temporelles recueillies. En se basant sur ces réponses, une modélisation de type

boîte blanche, basée sur des protocoles expérimentaux, est utilisée dans le contexte de rejet de perturbation où des modèles entiers et non entiers sont présentés. L'introduction de l'ordre non entier au niveau des phénomènes dissipatifs a permis d'obtenir de meilleurs résultats. Dans le contexte de suivi de trajectoire, une modélisation type boîte noire a été adoptée afin de réduire le nombre de paramètres. Les modèles non entiers permettent dans ce cas aussi d'obtenir de meilleurs résultats. Suite à la dispersion observée sur les réponses temporelles et fréquentielles en répétant la même expérience sur un ou plusieurs individus, un ensemble de modèles faisables de la dynamique du conducteur a été ensuite obtenu en utilisant des approches ensemblistes.

Cette étude ouvre des perspectives intéressantes quant à la détection de comportements anormaux lorsque les paramètres estimés des modèles sont en dehors des ensembles de solutions calculés par l'approche ensembliste.

Conclusion générale et perspectives

Ce mémoire est dédié à l'estimation paramétrique ensembliste par modèles non entiers à partir de données fréquentielles appliquée à la modélisation de la dynamique du conducteur. Les modèles non entiers permettent d'obtenir une représentation compacte de systèmes complexes à dimension infinie. L'estimation ensembliste permet, quant à elle, de s'affranchir de plusieurs contraintes présentes lors d'une estimation classique, à savoir la connaissance *a priori* de l'erreur affectant les données ou l'insuffisance du nombre de données qui empêche l'application des méthodes probabilistes. Les définitions d'intégration et de dérivation non entières sont d'abord étendues aux intervalles. Puis, des approches ensemblistes sont appliquées pour l'estimation de l'ensemble des coefficients et des ordres de dérivation sous la forme d'intervalles. L'estimation paramétrique par approche ensembliste est particulièrement adaptée à la modélisation de la dynamique du conducteur, car les études sur un, voire plusieurs, individus montrent que les réactions recueillies ne sont jamais identiques, mais varient d'une expérience à l'autre, voire d'un individu à l'autre.

Le chapitre 1 a été consacré à l'analyse par intervalles, thématique nouvelle dans l'équipe CRONE, nécessaire à l'extension des définitions de l'intégration et de la dérivation par intervalle au chapitre 2 et à l'estimation ensembliste à partir de données fréquentielles aux chapitres 3 et 4. Dans un premier temps, l'arithmétique des intervalles réels et complexes a été présentée ainsi que les problèmes afférents à la manipulation de ces intervalles tels que le pessimisme et l'enveloppement. Les intervalles complexes ont été abordés à travers trois modes de représentation : rectangulaire, polaire et circulaire. L'utilisation de l'arithmétique des intervalles dans le contexte d'inversion ensembliste réelle et complexe par contraction et bisection y a également été présentée. La contraction a été introduite pour éliminer les ensembles de points inconsistants avec les contraintes. La bisection est nécessaire lorsque l'ensemble de solutions est non convexe. Un algorithme mêlant la contraction et la bisection a été présenté.

Dans **le chapitre 2**, les principaux outils pour la modélisation de systèmes à dérivées

non entières réelles puis par intervalles ont été présentés. Les définitions, devenues usuelles, de l'intégration et de la dérivation non entières ont été étendues à des intervalles, ce qui constitue une première originalité de cette thèse. Les transformées de *Laplace* des opérateurs de dérivation et d'intégration par intervalle y ont été calculées, et leur monotonie par rapport à l'ordre de dérivation étudiée. S'en est suivi l'étude de stabilité et de résonance de fonctions de transfert élémentaires de première et de deuxième espèce, qui constitue une autre contribution originale de cette thèse, la connaissance des comportements fréquentiels des fonctions de transfert élémentaires étant indispensable pour la modélisation de systèmes non entiers à partir de données fréquentielles. Une généralisation des fonctions de transfert élémentaires à des ordres de dérivation par intervalles y a également été présentée.

Dans le **le chapitre 3**, nos contributions ont été consacrées à l'estimation ensembliste de paramètres de fonctions de transfert non entières à partir de données fréquentielles incertaines et bornées. L'ensemble de paramètres (coefficients et ordres de dérivation) a donc été caractérisé sous la forme d'intervalles à partir des représentations rectangulaire, polaire et circulaire. La fusion des résultats issus de ces représentations a permis d'obtenir un ensemble de solutions plus petit, car chaque représentation introduit du pessimisme différemment. Cette estimation ensembliste peut s'appliquer pour la modélisation de systèmes linéaires invariants dans le temps (LTI) certains, de systèmes LTI incertains, et de systèmes à paramètres variant dans le temps (LPV). Enfin, une application à l'estimation ensembliste des paramètres d'un système de diffusion thermique dans un barreau d'aluminium a été présentée. Les réponses fréquentielles du système, ainsi que les incertitudes à plus ou moins trois écarts-types, ont d'abord été estimées par une identification non paramétrique. L'estimation ensembliste a ensuite été appliquée pour obtenir l'ensemble de solutions pour chaque paramètre.

Le chapitre 4 a été consacré à la modélisation de la dynamique du conducteur, l'objectif étant de disposer à terme d'une bibliothèque de modèles utilisables dans le cadre du Contrôle Global du Châssis (CGC) et éventuellement de détecter des comportements anormaux de conducteurs. Deux démarches méthodologiques y ont été développées. La première est basée sur une modélisation de type boîte blanche de la dynamique du conducteur en rejet de perturbation où le conducteur, soumis à des perturbations de type rafale de vent, tente de les annuler. L'introduction de la dérivée non entière, pour la modélisation de phénomène visco-élastique, a permis d'améliorer le critère d'estimation. De plus, les études sur un, voire plusieurs, individu(s) ont montré que les réactions recueillies ne sont jamais identiques. Elles varient non seulement d'un conducteur à l'autre mais aussi d'une expérience à l'autre pour

le même conducteur. Il est alors préférable de rechercher un ensemble de modèles faisables d'un, voire plusieurs, conducteur(s) plutôt qu'un modèle unique. Une approche ensembliste a alors été adoptée. Dans la mesure où une modélisation de type boîte blanche introduit un grand nombre de paramètres, la seconde démarche méthodologique a été basée sur une modélisation de type boîte noire de la dynamique du conducteur en suivi de trajectoire où le conducteur minimise l'écart entre une trajectoire de consigne, projetée à l'écran, et l'angle au volant. Cette modélisation a permis de diminuer significativement le nombre de paramètres et d'appliquer plus facilement les algorithmes d'estimation ensemblistes développés au chapitre 3.

Les perspectives de recherche s'inscrivent directement dans la continuité des travaux en cours.

En estimation ensembliste, une des perspectives intéressantes serait d'utiliser d'autres formes de fonctions d'inclusion telles que les ellipsoïdes. Toutefois, l'utilisation de ces formes géométriques pour la résolution des CSP fortement non linéaires n'est pas aisée. Le développement d'une arithmétique des ellipsoïdes complexes pourrait permettre de borner davantage l'ensemble de solutions.

En identification de la dynamique du conducteur, après avoir fixé les structures des modèles dans le cas de rejet de perturbation comme dans le cas de suivi de trajectoire, une perspective intéressante serait de détecter les comportements anormaux lorsque les paramètres estimés des modèles sont en dehors des ensembles de solutions calculés par l'approche ensembliste.

Bibliographie

- [Alfeld et Herzberger, 1983] ALFELD, G. et HERZBERGER, J. (New York-1983). *Introduction to interval computations*. Academic Press.
- [Amberkar et al., 2004] AMBERKAR, S., BOLOURCHI, F., DEMERLY, J. et MILLSAP, S. (2004). A control system methodology for steer by wire systems. *SAE world congress, detroit Michigan*.
- [Angeli, 2002] ANGELI, D. Sontag, E. (2002). Monotone control systems. *IEEE Transaction on automatic control*, pages 1684–1698.
- [Antoni et Schoukens, 2007] ANTONI, J. et SCHOUKENS, J. (2007). A comprehensive study of the bias and variance of frequency-response-function measurements : optimal window selection and overlapping strategies. *Automatica*, 43(10):1723–1736.
- [Aoun, 2005] AOUN, M. (2005). *Systèmes linéaires non entiers et identification par bases orthogonales non entières*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1, Talence, France.
- [Arena et al., 2000] ARENA, P., CAPONETTO, R., FORTUNA, L. et PORTO, D. (2000). *Non-linear noninteger order circuits and systems : An introduction*, volume 38 de A. World Scientific publisher, world scientific series on nonlinear science édition.
- [Battaglia, 2008] BATTAGLIA, J. L. (2008). *Heat Transfer in Materials Forming Processes*, volume 13. WILEY, iste ltd and john wiley & sons inc édition.
- [Battaglia et al., 2000] BATTAGLIA, J.-L., LE LAY, L., J.-C., B., A., O. et O., C. (2000). Heat flux estimation through inverted non integer identification models. *Int. J. of Thermal Science*, 39(3):374–389.
- [Bendat et Piersol, 2000] BENDAT, J. S. et PIERSOL, A. G. (2000). *Random Data Analysis and Measurement Procedures*. Wiley Series in Probability and Statistics, 3rd édition.
- [Benhamou et al., 1999] BENHAMOU, F., GOUALARD, F., GRANVILLIERS, L. et PUGET, J. (1999). Revising hull and box consistency. *16th International Conference on Logic programming ICLP*, pages 230–244.

- [Benhamou *et al.*, 1994] BENHAMOU, F., MCALLESTER, D. et van HENTENRYCK, P. (NY-1994). Clp(intervals) revisited. *Proceedings of the International Logic Programming Symposium*, 124-138.
- [Burnham *et al.*, 1974] BURNHAM, G. O., SEO, J. et BEKEY, G. A. (1974). Identification of human driver models in car following. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-19, n-6:911–915.
- [Candau *et al.*, 2005] CANDAU, Y., RAÏSSI, T., RAMDANI, N. et IBOS, L. (2005). Complex interval arithmetic using polar form. *Reliable computing*, 12:1–20.
- [Caputo, 1967] CAPUTO, M. (1967). Linear models of dissepation whose Q is almost frequency independant. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 2(13):529–539.
- [Chabert et Jaulin, 2009] CHABERT, G. et JAULIN, L. (2009). Contractor programming. *Artificial Intelligence*.
- [Cleary, 1987] CLEARY, J. (1987). Logical arithmetic. *Futur Computing systems*, pages 125–149.
- [Cois, 2002] COIS, O. (2002). *Systèmes linéaires non entiers et identification par modèle non entier : application en thermique*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1, Talence, France.
- [Davis, 1987] DAVIS, E. (1987). Constraint propagation with interval labels. *Artificial Intelligence*, pages 281–331.
- [De Vlugt *et al.*, 2006] DE VLUGT, E., SCHOUTEN, A. et Van der HELM, F. (2006). Quantification of intrinsic and reflexive properties during multijoint arm posture. *Journal of Neuroscience Methods*.
- [De Vlugt *et al.*, 2001] DE VLUGT, E., Van der HELM, F., SCHOUTEN, A. et G., B. (2001). Analysis of reflexive feedback control loop during posture maintenance. *Journal of Biological Cybernetics*, 84:133–141.
- [Fukui *et al.*, 2004] FUKUI, K., TAKAHASHI, T., AMANO, Y., SUGAWARA, T., TSUCHIYA, Y. et KOIBUCHI, K. (2004). Experimental study on the performance of driver-vehicle system for the change of steering characteristics. *AVEC*, pages 41–46.
- [Guo et Guan, 1993] GUO, K. et GUAN, H. (1993). Vehicle system dynamics. *AVEC*, pages 141–184.
- [Hakvoort, 1993] HAKVOORT, R. (1993). Frequency domain curve fitting with maximum amplitude criterion and guaranted stability. *In 2nd European Control Conf.*, pages 252–257, Netherlands.

- [Hansen, 1992] HANSEN, E. (New York-1992). *Global Optimization Using Interval Analysis*. Dekker.
- [Henrici, 1971] HENRICI, P. (1971). *Circular arithmetic and the determination of polynomial zeros*, volume 228. Springer. Lecture notes : 228 : 86-92.
- [Hess et Modjtahedzadeh, 1989] HESS, R. A. et MODJTAHEDZADEH, A. (1989). A preview control model of driver steering behaviour. *IEEE Conference on Systems, Man and Cybernetics*, 11:504–509.
- [Hilfer, 2000] HILFER, R. (2000). *Applications of fractional calculus in physics*. World Scientific Publishing.
- [Hirsch et Smith, 2003] HIRSCH, M. et SMITH, H. (2003). Competitive and cooperative systems : A mini-review. *POSTA*, 294:183–190.
- [Hirsch et Smith, 2006] HIRSCH, M. et SMITH, H. (2006). *Handbook of differential equations, Ordinary differential equations*. Elsevier.
- [Jaulin, 2000] JAULIN, L. (2000). *Le calcul ensembliste par analyse par intervalles et ses applications*. Habilitation à diriger des recherches, Université Paris-Sud, orsay, France.
- [Jaulin et Chabert, 2008] JAULIN, L. et CHABERT, G. (2008). Quimper : un langage de programmation pour le calcul ensembliste ; application à l’automatique. Bucarest, Roumanie.
- [Jaulin et al., 2001a] JAULIN, L., KIEFFER, M., BRAEMS, I. et WALTER, E. (2001a). Guaranteed non linear estimation using constraint propagation on sets. *International journal of control*, 74(18):1772–1782.
- [Jaulin et al., 2001b] JAULIN, L., KIEFFER, M., DIDRIT, O. et WALTER, E. (London-2001b). *Applied interval analysis*. Springer.
- [Jaulin et Walter, 1993] JAULIN, L. et WALTER, E. (1993). Set inversion via interval analysis for nonlinear bounded-error estimation. *Automatica*, 29(4):1053–1064.
- [Kieffer et Walter, 2006] KIEFFER, M. et WALTER, E. (2006). Guaranteed nonlinear state estimation for continuous-time dynamical models from discrete-time measurements. In *ROCOND*, Toulouse.
- [Kilbas et al., 2006] KILBAS, A. A., SRIVASTAVA, H. et TRUJILLO, J. (2006). *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, volume 204. Elsevier, north-holland mathematics studies édition.
- [Kiryakova, 1993] KIRYAKOVA, V. (1993). *Generalized Fractional Calculus and Applications*. Chapman & Hall.

- [Klatte, 1993] KLATTE, R. (1993). *C-XSC : A C++ Class Library for Extended Scientific Computing*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA. Translator-Corliss, G. F.
- [Klatte et Ullrich, 1980] KLATTE, R. et ULLRICH, U. (1980). *Complex sector arithmetic*, volume 228. Springer. Lecture notes : 228 : 86-92.
- [Knüppel, 1993] KNÜPPEL, O. (1993). *RPOFIL/BIAS- A fast interval library*, volume 53. Computing.
- [Krier, 1974] KRIER, N. (1974). Methods and applications of interval analysis. *Z. Angew. Math. Mech.*, 54 :225-226.
- [Le Lay, 1998] LE LAY, L. (1998). *Identification fréquentielle et temporelle par modèle non entier*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, Talence, France.
- [Levy, 1959] LEVY, E. C. (1959). Complex curve fitting. *IEEE Trans. Autom. Control*, 4:37–43.
- [Lin, 2001] LIN, J. (2001). *Modélisatoin et identification de systèmes d'ordre non entier*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, France.
- [Liouville, 1832] LIOUVILLE, J. (1832). Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces équations. 13:71–162.
- [Lohner et Wolff, 1985] LOHNER, R. et WOLFF, J. Gudenberg, V. (1985). Complex interval division with maximum accuracy. *7th IEEE Symposium on Computer Arithmetic*, pages 332–336.
- [Lorenzo et Hartley, 2001] LORENZO, C. et HARTLEY, T. (2001). Initialization in fractional order systems. *Proceedings of the european control conference*, pages 1471–1476.
- [Luo et Chen, 2009] LUO, Y. et CHEN, Y. (2009). Fractional order proportional derivative controller for a class of a fractional order systems. *Automatica*, 45(10):2446–2450.
- [MacAdam, 1981] MACADAM, C. (1981). Application of an optimal preview control for simulation of closed-loop automobile driving. *IEEE Transactions and Systems, Man, and Cybernetics*, 11(6):393–399.
- [MacAdam, 2006] MACADAM, C. (2006). Understanding and modeling the human driver. *Vehicle System Dynamics*, 40:101–134.
- [Mainardi, 2010] MAINARDI, F. (2010). *Fractinal calculus and waves in linear viscoelasticity : An Introduction to Mathematical Models*. World Scientific publisher, world scientific series on nonlinear science édition.

- [Malti *et al.*, 2011] MALTI, R., MOREAU, X., KHEMANE, F. et OUSTALOUP, A. (2011). Stability and resonance conditions of elementary fractional transfer functions. *Accepted for Automatica journal*.
- [Mandelbrot et Van Ness, 1968] MANDELBROT, B. et VAN NESS, J. (1968). Fractional brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM*, 10(4):422 – 437.
- [Mathieu *et al.*, 1995] MATHIEU, B., OUSTALOUP, A. et LEVRON, F. (1995). Transfer function parameter estimation by interpolation in the frequency domain. *In EEC'95*, Rome, Italie.
- [Matignon, 1998] MATIGNON, D. (1998). Stability properties for generalized fractional differential systems. *ESAIM proceedings - Systèmes Différentiels Fractionnaires - Modèles, Méthodes et Applications*, 5.
- [Meslem, 2008] MESLEM, N. (2008). *Atteignabilité hybride des systèmes dynamiques continus par analyse par intervalles. Application à l'estimation ensembliste*. Thèse de doctorat, Université Paris Est.
- [Miller et Ross, 1993] MILLER, K. et ROSS, B. (1993). *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. A Wiley-Interscience Publication.
- [Moore, 1979] MOORE, R. (Philadelphia-1979). *Methods and applications of interval analysis*. SIAM.
- [Moore, 1966] MOORE, R. E. (1966). *Interval analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [Moreau *et al.*, 2004] MOREAU, X., ALTET, O. et OUSTALOUP, A. (2004). The crone suspension management of the comfort-road holding dilemma. *Journal of Nonlinear Dynamics-Special issue on Fractional Calculus*, 38:461–484.
- [Moreau *et al.*, 2005] MOREAU, X., ALTET, O. et OUSTALOUP, A. (November 2005). *Fractional differentiation and its applications*. Ubooks Verlag Ed., Neusä.
- [Moreau *et al.*, 2002] MOREAU, X., RAMUS-SERMENT, C. et OUSTALOUP, A. (2002). Fractional differentiation in passive vibration control. *Journal of Nonlinear Dynamics-Special issue on Fractional Calculus*, 29:343–362.
- [Mostafa, 1994] MOSTAFA, S. H. (1994). Characterization of driver/vehicle directional control using three models of human driver. *AVEC*, pages 36–41.
- [Moze *et al.*, 2005] MOZE, M., SABATIER, J. et OUSTALOUP, A. (2005). Lmi tools for stability analysis of fractional systems. *ASME IDETC/CIE Conferences*.
- [Müller, 1926] MÜLLER, M. (1926). Über das fundamental theorem in der theorie der gewöhnlichen differentialgleichungen. *Math*, pages 619–645.

- [Nedialkov et Jackson, 2002] NEDIALKOV, N. S. et JACKSON, K. R. (2002). The design and implementation of an object-oriented validated ode solver. *Kluwer Academic Publisher*.
- [Neher, 2007] NEHER, M. (2007). Complex standard functions and their implementation in the costly library. *ACM Trans. Math. Softw.*, 33(1):2.
- [Neumaier, 2003] NEUMAIER, A. (2003). *Taylor forms - use and limits*, volume 9 :43-79. Reliable Computing.
- [Neumaier, 1990] NEUMAIER, A. (Cambridge-1990). *Interval methods for systems of equations*. Cambridge University Press.
- [Nickel, 1980] NICKEL, K. (1980). *Arithmetic of complex sets*, volume 24. Computing.
- [Oldham et Spanier, 1974] OLDHAM, K. B. et SPANIER, J. (1974). *The fractionnal calculus*. Academic Press, New-York and London.
- [Oustaloup, 1983] OUSTALOUP, A. (1983). *Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire*. Masson - Paris.
- [Oustaloup, 1991] OUSTALOUP, A. (1991). *La commande CRONE*. Hermès - Paris.
- [Oustaloup, 1995] OUSTALOUP, A. (1995). *La dérivation non-entière*. Hermès - Paris.
- [Petković, 1998] PETKOVIĆ, S. (1998). *Complex Interval Arithmetic and Its applications*, volume 105. mathematical research, 1st édition.
- [Phillipson et Schuster, 2009] PHILLIPSON, P. E. et SCHUSTER, P. (2009). *Modeling by Non-linear Differential Equations : Dissipative and Conservative Processes*, volume 69 de A. World Scientific publisher, world scientific series on nonlinear science édition.
- [Pintelon et al., 1994] PINTELON, R., GUILLAUME, P., ROLAIN, Y., SCHOUKENS, J. et VAN HAMME, H. (1994). parametric identification of transfer functions in the frequency domain - a survey. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(11):2245–2260.
- [Podlubny, 1999a] PODLUBNY, I. (1999a). *Fractional Differential Equations*. Academic Press, San Diego.
- [Podlubny, 1999b] PODLUBNY, I. (1999b). Fractional-order systems and pid controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(1):208–214.
- [Poty, 2006] POTY, A. (2006). *Planification de trajectoire dans un environnement dynamique et génération de mouvement d'ordre non entier*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux1, France.
- [Raïssi et al., 2004] RAÏSSI, R., RAMDANI, N. et CANDAU, Y. (2004). Set membership state and parameter estimation for systems described by nonlinear differential equations. *Automatica*, 43:1771–1777.

- [Raïssi, 2004] RAÏSSI, T. (2004). *Méthodes ensemblistes pour l'estimation d'état et de paramètre*. Thèse de doctorat, Université Paris XII, Val de Marne, France.
- [Ramdani, 2005] RAMDANI, N. (2005). *Méthodes ensemblistes pour l'estimation*. Habilitation à diriger des recherches, Université Paris XII, Val de Marne, France.
- [Renski, 2001] RENSKI, A. (2001). Identification of driver model parameters. *International Journal of Occupational Safety and Ergonomics*, 1(7):79–90.
- [Reynet et al., 2009] REYNET, O., JAULIN, L. et CHABERT, G. (2009). Robust tdoa passive location using interval analysis and contractor programming. *Accepted to international radar conference - radar 2009*.
- [Rodrigues et al., 2000] RODRIGUES, S., MUNICHANDRAIAH, N. et SHUKLA, A. (2000). A review of state of charge indication of batteries by means of A.C. impedance measurements. *Journal of Power Sources*, 87:12–20.
- [Rokne et Lancaster, 1971] ROKNE, J. et LANCASTER, P. (1971). Complex interval arithmetic. *Commun. ACM*, 14(2):111–112.
- [Rump, 1999] RUMP, S. (1999). Intlab - interval laboratry. *Developements in Reliable Computing*, pages 77–104.
- [Rump, 2001] RUMP, S. (2001). *INTLAB - INTerval LABoratory*. Springer-Verlag. Handbook of computer algebra : Foundations, applications, Systems.
- [Sabatier et al., 2007] SABATIER, J., AGRAWAL, O. P. et TENREIRO MACHADO, J. A. (2007). *Advances in Fractional Calculus*. Springer, Dordrecht, The Netherlands.
- [Sabatier et al., 2006] SABATIER, J., AOUN, M., OUSTALOUP, A., GRÉGOIRE, G., RAGOT, F. et ROY, P. (2006). Fractional system identification for lead acid battery state charge estimation. *Signal processing*, 87:2645–2657.
- [Sabatier et al., 2010] SABATIER, J., MOZE, M. et FARGES, C. (2010). Lmi stability conditions for fractional order systems. *Computers & mathematics with applications*, 15(5):1594–1609.
- [Samko et al., 1993] SAMKO, S. G., KILBAS, A. A. et MARICHEV, O. I. (1993). *Fractional integrals and derivatives : theory and applications*. Gordon and Breach Science.
- [Sanathanan et Koerner, 1963] SANATHANAN, C. H. et KOERNER, J. (1963). Transfer function synthesis as a ratio of two complex polynomilas. *IEEE Trans. Autom. Control*, 8:56–58.
- [Smith, 1995] SMITH, H. (1995). *Monotone dynamical systems : An introduction to the theory of competitive and cooperative systems*. American Mathematical Society.

- [Sommacal *et al.*, 2008] SOMMACAL, L., MELCHIOR, P., CABELGUEN, J.-M., OUSTALOUP, A. et LJSPEERT, J. (2008). Fractional multi-models of the gastrocnemius frog muscle. *Journal of vibration and control*, Sage publishing., 14:1415–1430.
- [Spanos, 1991] SPANOS, J. (1991). Algorithms for l_2 and l_∞ transfer function curve fitting. *Proc. AIAA Guid. Navig. Control Conf*, pages 1739–1747.
- [Speich *et al.*, 2005] SPEICH, J., SHAO, L. et GOLDFARB, M. (2005). Modeling the human hand as it interacts with a telemanipulation system. *Mechatronics*.
- [Sunaga, 1958] SUNAGA, T. (1958). *Theory of an interval algebra and its applications to numerical analysis*, volume 2. Gakujutsu Bunken Fukyu-kai.
- [Trigeassou *et al.*, 2010a] TRIGEASSOU, J., MAAMRI, N. et OUSTALOUP, A. (2010a). The pseudo state space model of linear fractional differential systems. *4th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications FDA*.
- [Trigeassou *et al.*, 2010b] TRIGEASSOU, J., MAAMRI, N. et TENOUTIT, M. (2010b). Conditions initiales et initialisation des systèmes différentiels fractionnaires linéaires. *Sixième Conférence Internationale Francophone d’Automatique CIFA*.
- [Uhl, 1996] UHL, R. (1996). An extension of max müller’s theorem to differential equations in ordered banach spaces. *Funkcialaj Ekvacioj*, 39(2):203–216.
- [Valério et da Costa, 2007] VALÉRIO, D. et da COSTA, J. S. (2007). *Advances in Fractional Calculus Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*, chapitre Identification of fractional models from frequency data, pages 229–242. Springer.
- [Van Der Helm *et al.*, 2002] VAN DER HELM, F., SCHOUTEN, A., VLUGT, E. et BROUWEN, G. (2002). Identification of intrinsic and reflexive components of human arm dynamics during postural control. *Journal of Neuroscience Methods*, pages 1–14.
- [Victor, 2010] VICTOR, S. (2010). *Identification par modèles non entiers pour la poursuite robuste de trajectoire par platitude*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux1.
- [Videau, 2009] VIDEAU, G. (2009). *Méthode garanties pour l’estimation d’état et le contrôle de cohérence des systèmes non linéaires à temps continu*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux1.
- [Walter et Kieffer, 2003] WALTER, E. et KIEFFER, M. (2003). Interval analysis for guaranteed nonlinear parameter estimation. In *SYSID*, Rotterdam.
- [Waltz, 1975] WALTZ, D. (1975). Generating semantic descriptions from drawing of scenes with shadows. *The psychology of computer vision*, pages 19–91.

- [Wolfgang, 1997] WOLFGANG, W. (1997). Differential inequalities and maximum principles : Theory new methods and applications. *Nonlinear analysis : Theory methods and applications*, 30:4695–4711.
- [Yu et al., 2004] YU, J., ASTON, J., GILSINGER, C., SHUTWAY, J. et TOKUNAGA, H. (2004). Vehicle dynamic feeling study with a focus on the on-center steering feeling of north american highway driving. *AVEC*, pages 415–420.
- [Zamani et al., 2009] ZAMANI, M., KARIMI-GHARTEMANI, M., SADATI, N. et PARNIANI, M. (2009). Design of a fractional order pid controller for an avr using practical swarm optimization. *Control Engineering Practice*, 17(12):1380–1387.
- [Zaslavsky, 2005] ZASLAVSKY, G. M. (2005). *Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics*. Oxford university press, New York.

2011

MÉTHODES ENSEMBLISTES POUR L'ESTIMATION FRÉQUENTIELLE
PAR MODÈLES NON ENTIERS

KHEMANE FIRAS

Résumé

Les principaux travaux de cette thèse concernent l'estimation ensembliste des modèles non entiers.

Le premier chapitre rappelle les définitions des intervalles réels et complexes et les différents types de représentation des fonctions d'inclusion. Les méthodes d'estimation garanties sont introduites par la suite à travers l'inversion ensembliste par contraction puis par bisection.

Le deuxième chapitre présente dans un premier temps les principaux outils pour la modélisation de systèmes à dérivées non entières puis l'extension de ces outils aux dérivées non entières sous forme d'intervalles. Une étude sur les conditions de résonance et de stabilité des systèmes de première et de deuxième espèce est ensuite présentée.

Le troisième chapitre porte sur l'estimation des paramètres d'un modèle non entier par approches ensemblistes à partir des données fréquentielles incertaines. Des exemples d'application des fonctions de transfert élémentaires de première et de deuxième espèce sont présentés. Tous les paramètres des fonctions de transfert non entières, y compris les ordres de dérivation, sont estimés en utilisant les représentations rectangulaire, polaire et circulaire basées sur des CSP réels et complexes.

Le quatrième chapitre est consacré à l'identification de la dynamique du conducteur dans deux contextes différents : rejet de perturbation et suivi de trajectoire. Dans les deux cas, il est montré que les modèles non entiers permettent d'obtenir de meilleurs résultats par rapport aux modèles entiers. Suite à la dispersion observée sur les données, une approche ensembliste est utilisée pour estimer un ensemble de modèles faisables de la dynamique du conducteur.

Mots clés

Dérivation non entière, estimation ensembliste, analyse par intervalles, identification non paramétrique, dynamique du conducteur, fonction d'inclusion, SIVIA, modèles non entiers de première et deuxième espèce.

Abstract

The major work of this thesis deals with set membership estimation of fractional models.

The first chapter recalls basic definitions of real and complex intervals and different representations of inclusion functions. Guaranteed estimation methods are also introduced through set inversion via contraction and set inversion via bisection.

The second chapter presents in its first part, the main tools dedicated to fractional differentiation modeling and the extension of these tools to fractional differentiation under interval form. In the second part, a whole study about stability and resonance conditions of elementary transfer function of both first and second kind is also presented.

The third chapter deals with set membership estimation of fractional models using uncertain frequency data. Numerical examples of elementary transfer function of first and second kind are presented. All parameters of both transfer functions are estimated including the fractional order. All of rectangular, polar and circular inclusion functions based on real and complex intervals are used for the estimation.

The fourth chapter is dedicated to driver's dynamics identification within two different approaches : disturbance rejection and trajectory tracking. It is shown in the two cases that the fractional models perform better than the rational ones. Because of data dispersion, a set membership approach is subsequently adopted to estimate a whole set of feasible driver's dynamics models

Keywords

Fractional differentiation, set membership estimation, interval analysis, non parametric identification, driver's dynamics, inclusion function, SIVIA, first and second kind transfer functions

